Бел. адд.

Працы Беларускага дзяржаўнага універсітэта

1932 №26

Беларуская Социялістычная Савецкая Рэспубліка
Белорусская Социалистическая Советская Республика

ПРАЦЫ
БЕЛАРУСКАГА ДЗЯРЖАЎНАГА УНІВЭРСЫТЭТУ

ТРУДЫ
БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

LES ANNALES
DE L'UNIVERSITÉ DE LA BIÉLARUSSIE

ФІЗЫКА-МАТЭМАТЫЧНЫ ФАКУЛЬТЭТ

1932 г. № 26

ВЫДАНЬНЕ ПРАЎЛЕНЬНЯ Б. Д. У.
МЕНСК — 1932

УВОДЗІНЫ.

Пасьля доўгага перапынку паяўляецца ізноў выпуск работ фізыка-матэматычнага факультэту Б.Дз.У. ў „Працах Б.Дз.У.“. Складаньне гэтага выпуску трывала больш за два гады.

Хаця мы можам констатаваць некаторыя посьпехі ў параўнаньні з папярэднім нумарам, аднак, мы павінны прызнаць, што гэтыя посьпехі яшчэ не перакрываюць тых недахопаў, якія мае наш выпуск.

Вось нашы посьпехі: барацьба супроць ідэалістычных і іншых, нам ідэолёгічна варожых плыняў у матэматыцы, іх крытыка з пункту гледжаньня дыялектычнага матэрыялізму, спроба дыялектычна-матэрыялістычнага абгрунтаваньня матэматычных дысцыплін, крытыка навуковай вытворчасьці папярэдняга нумару, даволі значны колькасны і якасны прогрэс у параўнаньні з папярэднім нумарам (зборнік выключна матэматычна-фізычны ў той час, як папярэдні быў наогул прыродазнаўчы) і г. д.

Нашы недахопы: наша тэматыка яшчэ ня зусім адпавядае задачам соцыялістычнага будаўніцтва на сучасным этапе: мала артыкулаў па фізыцы, па мэтодыцы, зусім няма па тэхніцы. Яшчэ недастаткова разгорнута барацьба за матэрыялістычную дыялектыку ў матэматыцы, супроць мэханіцызму ў фізыцы. Гістарычныя пастановы ЦК нашай партыі *аб навуцы на службе соцыялістычнага будаўніцтва, аб тэхпропагандзе, аб барацьбе на 2 фронты, аб сярэдняй і пачатковай школе, аб павышэньні якасьці продукцыі, а таксама 6 умоў т. Сталіна* яшчэ не знайшлі таго адбітку, які павінны былі знайсьці. Гэта—слабыя бакі нашага выпуску.

Нашай бліжэйшай задачай будзе ліквідаваць гэтыя недахопы, якія мае наш выпуск, каб паставіць цалкам нашу

навуковую працу на службу соцыялістычнаму будаўніцтву, на службу пролетарскай культуры.

Нашы асноўныя лёзунгі:

За навуку на службу соцыялістычнаму будаўніцтву.

За рэконструкцыю нашай навукі на аснове дыялектычнага матэрыялізму.

За рашучую барацьбу на два фронты супроць усіх нам чужых і варожых ідэолёгіяў у навуцы.

За партыйнасьць у навуцы.

За павышэньне якасьці навуковай продукцыі.

Да пытаньня аб незалежнасьці постулятаў у сыстэме Д. Гільбэрта.

Ч. Дамброўскі.

Ужо I. Мур і Розэнталь паказалі лёгічную залішнясьць некаторых постулятаў Гільбэрта („Grundlagen der Geometrie", 1899, апошн. выдан. 1922). Сам Гільбэрт узяў гэта часткова пад увагу ў 5-м выданьні „Асноў геомэтрыі". (Рас. пераклад выд. Высоцкім у Ленінградзе ў 1923 годзе). Але яшчэ, калі падзеліць аксыёмы Гільбэрта на паасобныя „Aussagen", дык іх будзе і ў 5-ым выданьні 34,—паміж гэтым калі разьвіць ідэі, нявыразна выказаныя самім Гільбэртам, ды зрабіць яшчэ некаторыя спрашчэньні шляхам увядзеньня дапаможных азначэньняў, дык лік гэтых выказаньняў аксыём магчыма давесьці да 5-ёх—г. ё. 14,7%, а 85,3% апынуцца залішнімі, залежнымі. Мы зробім дзеля гетага невялічкі пагляд сыстэмы Гільбэрта.

I. 1 „Два розныя пункты азначаюць заўсёды простую".

Тутака два выказаньні: 1. Калі ёсьць два пункты A ды B, тады ёсьць і праходзячая праз іх простая *a*, 2. такая простая адна.

Але што па Гільбэрту простая? Звычайна лічыцца, што гэта ў яго (ня так, як прыкладам у Пэано, „I principi di geometria logicamente esposti", 1889. або ў Паша, „Vorlesungen über neuere Geometrie", 1882, 2-ое выд. 1926, або ў Вэблна, „Transactions of the American Mathematical Society", 1904, ліпень, або ў Кагана, „Записки Новороссийского Университета", 1904 і 1905, тт. 97 і 101) ня мноства пунктаў. Але хаця за такі погляд і гаворыць увядзеньне Гільбэрта, аднак яго „паясьненьне" першае ў § 4 гаворыць іншае: там мы чытаем: „Усе пункты простай, якія ляжаць па адзін і гэты самы бок ад пункту O, называюцца праменьнем, выходзячым з пункту O: такім чынам кожны пункт простай дзеліць яе на два праменьні".

Ці-ж тады можа тое, што *дзеліцца* на два мноствы пунктаў, само ня быць мноствам пунктаў?

А калі мы будзем лічыць простую мноствам пунктаў і ўвядзем яе азначэньне, напрыклад, па Вэблну, дык першае выказаньне аксыёмы I, 1 залішняе. Убачым далей, што залішняе і другое выказаньне гэтага постуляту.

I, 2. „Якія-колечы два розныя пункты простай азначаюць гэтую простую".

Тутака ізноў два выказаньні : 3. Калі A і B азначаюць простую *a* і A і C таксама простую *a*, дык двойцы пунктаў B, C адпавядае таксама простая *a*. 4. пунктам B і C не адпавядае ніякая іншая простая (бо і гэта ўваходзіць у паняцьце „азначае" па § 2 Гільбэрта).

3.—незалежны постулят, ён адпавядае 6 постуляту Вэблна. Але 4.—яўна вынік 2.-га.

Пры 3. будзе 2. ужо залежнае, як давёў Вэблн (loc. cit.)

I, 3. На простай заўсёды існуюць прынамсі два пункты, а ў кожнай роўніцы існуюць заўсёды прынамсі тры пункты, якія не ляжаць на аднэй простай.

Тутака дадана паясьненьне, згодна якога „далучаючы прасторавыя постуляты I групы, досыць постуляваць, што ў роўніцы існуе заўсёды прынамсі *адзін* пункт. Абмяжоўваючыся элемэнтамі *аднэй* роўніцы, магчыма, калі далучыць роўнічныя постуляты групы II, першую частку I, 3 абмежаваць патрабаваньнем, каб на простай існаваў прынамсі адзін пункт".

Але што значыць па Гільбэрту „пункт існуе на роўніцы ці на простай"? Гэта значыць, што гэты пункт і яшчэ адзін азначаюць гэтую простую, або гэты пункт і яшчэ два, якія не ляжаць з першым на аднэй простай, азначаюць уласна даную роўніцу. Тады навошта тутака далучаць якія-небудзь постуляты, калі ўжо па сэнсу дастаткова патрабаваць, каб існаваў адзін пункт, бо праз гэта самае ўжо патрабуецца і існаваньне астатніх пунктаў, аб якіх гаворыць I, 3?

Гэты постулят I, 3 мае яўна два выказаньні, якія і Гільбэрт адзначае ў паясьненьні, як дзьве часткі, і якія мы азначым 5. і 6.

Абедзьве яны выцякаюць у 2—5 выданьнях Гільбэрта з „аксыёмы паўнаты". Бо калі-б не існавалі пункты згодна 5. і 6., тады праз увядзеньне іх магчыма было-б пашырыць сыстэму без супярэчнасьцяў.

I, 4. „Тры пункты A, B, C, якія не ляжаць на аднэй і гэтай самай простай, заўсёды азначаюць роўніцу α".

Тутака, як і ў I, 1, мы знойдзем два выказаньні, 7. і 8. Ізноў трэба нам запытацца, што такое роўніца? Калі мы, разгортваючы далей думку паясьненьня першага ў § 4, увядзем Пэанаўскае або Вэблнаўскае азначэньне роўніцы—тады, як давёў Шур (цытавана ўва ўвагах Вольбэрга да перакладу Гільбэрта, старонка 146), 8. будзе залежным пастулятам,—а 7. зразумела паводле самага азначэньня роўніцы таксама залішнім.

1, 5 (9. і 10): „якія-колечы тры пункты роўніцы, якія не ляжаць на аднэй простай, азначаюць гэтую роўніцу". (Параўнай 1, 2).

Вядома, 10, як і 4., непатрэбна, а адносна 9. пры нашым разьвіненьні азначэньняў Гільбэрта ў дусе яго першага паясьненьня да § 4, давёў тое самае Шур, з якім, як адзначае Вольбэрг (loc. cit.), згаджаюцца і Э. Мур і В. Каган. Тое, што Вольбэрг адносна I, 5, а Мур (па Вольбэргу) адносна I, 4 і I, 6 кажуць аб довадах у *сыстэме Гільбэрта*, датыркаецца як раз да неразгорнутай па нашаму сыстэмы (Вольбэрг, loc. cit., старонка 147).

I, 6 (11.): „Калі два пункты A і B простай *a* ляжаць у роўніцы α, дык і ўсялякі пункт простай *a* ляжыць у роўніцы α".

Гэта залежна па Пашу (loc. cit., Seite 22 der II Auflage, 4. Lehrsatz; цытата Вольбэрга, старонка 146 унізе).

1, 7 (12.): „Калі дзьве роўніцы α і β маюць адзін супольны пункт A, тады яны маюць прынамсі яшчэ адзін супольны пункт B".

Гэты постулят, які адпавядае 16. Пэано і 10. Вэблна, незалежны (усе гэтыя незалежнасьці даведзены Вэблнам).

I, 8 (13.): „Існуюць прынамсі чатыры пункты, якія не ляжаць у аднэй роўніцы".

Гэты постулят сформуляваны Гільбэртам так, што калі-б ня было постуляту паўнаты—як гэта мае месца прыкладам у першым выданьні Гільбэрта—там яго няма—дык усім постулятам Гільбэрта здавальняла-б аднамерная геомэтрыя! Інакш кажучы, ён ня выконвае свайго прызначэньня, і пры ім тое самае здараецца з 6. Бо што-ж, калі-б ня было зусім роўніцаў? Аб існаваньні пунктаў постулюецца, а аб існаваньні роўніцаў нідзе.

Толькі постулят паўнаты нас ратуе, але тады I, 8 цалком непатрэбны, як вышэй I, 3.[1]).

---

[1]) Гл. Гр. Грузинцев, „Об аксиомах первой группы в системе Hilbert'a", Записки харківського математичного товариства та у. і. м. н., стр. 163.

II, 1 (14.) : „Калі A, B, C—пункты аднэй простай, і B ляжыць паміж A і C, тады B ляжыць таксама паміж C і A“.

На падставе постуляту паўнаты мы можам давесьці такую тэорэму (як і ўсялякую тэорэму існаваньня, праўдзівую ў трохмернай эўклідавай геомэтрыі) :

„Калі A, B, C пункты, якія не ляжаць на аднэй простай, D—пункт, які ляжыць паміж A і B, E—пункт, які разам з A, B, C ляжыць на аднэй роўніцы, і D і E не ляжаць на аднэй простай ані з A, ані з B, ані з C, ані з ніякім пунктам, які ляжаў-бы паміж B і C, дык існуе такі пункт F, які ляжыць з D і E на аднэй простай і разам з гэтым ляжыць паміж A і C, а таксама паміж C і A“.

Бо паводле Гільбэрта—разьдзел II—мы давядзем, што гэта не супярэчыць іншым постулятам, значыць, магчыма пашырыць сыстэму ўвядзеньнем такога пункту F, калі-б ён не існаваў, а гэта было-б у супярэчнасьці з постулятам паўнаты. Значыць, такі пункт F заўсёды існуе.

На падставе гэтай тэорэмы і незалежных постулятаў групы I і II мы ніжэй давядзем залежнасьць 14. Даную тэорэму мы наперад будзем азначаць як „Тэорэму П“.

II, 2. Калі A і C—пункты аднэй простай, дык існуе (15. :) прынамсі адзін пункт B, які ляжыць паміж A ды C, і (16. :) прынамсі адзін пункт D такі, што C ляжыць паміж A і D.

Малюнак, да якога Гільбэрт адсылае чытача, не ўважае на тое, што тутака ня сказана, што B і D ляжаць на тэй самай простай, аб якой сказана, што A і C на ёй ляжаць. Але гэта лёгка даводзіцца.

Ужо ў 1924 годзе ў „Математическом Сборнике“ (Масква) *Брэнёў* давёў, што 15. залежна (гэты довад яшчэ раней даў Вэблн—loc cit.—у 1904 годзе!).

Але і 16. па постуляту паўнаты залежна.

II, 3. З трох пунктаў простай (17. :) заўсёды адзін і (18. :) толькі адзін ляжыць паміж дзьвюма астатнімі.

Тутака 17. залежна, як гэта відаць у Паша, Пэано і Вэблна. Але 18. незалежна, як адпаведны 3 постулят Вэблна.

II, 4 (19.) : „Няхай будуць A, B, C—тры пункты, якія не ляжаць на аднэй простай, і a—простая ў роўніцы ABC, якая не праходзіць ані праз адзін з пунктаў A, B, C. Калі пры гэтым простая a праходзіць праз пункт адрэзка AB, дык яна няўхільна праходзіць або праз пункт адрэзка AC, або праз пункт адрэзка BC“.

Гэта 4-ты роўнічны „Grundsatz“ („Kernsatz“ у новым выданьні) Паша. Пры гэтым „або—або“ („entweder—oder“) разумее Паш так, што яшчэ не выключае выпадку, каб а праходзіла і праз пункт адрэзка AC, і праз пункт адрэзка BC (Паш толькі даводзіць немагчымасьць апошняга, калі а не праходзіць праз C).

19. і 14. выцякаюць з тэорэмы П—значыць, яны залежныя. Адносна 19. гэта відавочна, а 14. ось як:

Хай B ляжыць паміж A і C. Тады паводле постуляту паўнаты існуе пункт E, які не ляжыць на простай AC, паводле 16. пункт H такі, што E ляжыць паміж B і H. Тады паводле тэорэмы П існуе (маючы на ўвазе і постулят I, 2) пункт I на аднэй простай з A і E і паміж C і H. Як у Вэблна з 8-га постуляту выцякае 13. Пэано, таксама і тутака будзе E паміж A і I. Тады паводле тэорэмы П ізноў— калі яе прыстасаваць да трыкутніка AIC—існуе пункт—паводле I, 2. не іншы як B—які ляжыць і паміж A і C, і паміж C і A: апошняе мы мелі давесьці.

Значыць, у групе II толькі адзін незалежны постулят. Усё гэта ад таго, што постулят паўнаты занадта, як кажуць, „моцны“.

III, 1. „Калі A, B—два пункты на простай *a*, a *A'*—пункт на гэтай самай або на іншай простай *a'*, дык (20. :) заўсёды магчыма знайсьці на даным ад пункту A' баку простай *a'* адзін і (21. :) толькі адзін такі пункт B', што адрэзак AB конгруэнтны адрэзку A'B'. (22. :) Кожны адрэзак конгруэнтны самому сабе, г. ё. заўсёды AB=AB і (23. :) AB=BA.“.

Тутака, як мы бачым, ажно 4 выказаньні. Але 23. залішняе паводле паясьненьня другога § 3, дзе сказана: „Мы разглядаем на простай два пунты A і B : сыстэму гэтых абодвух пунктаў мы называем адрэзкам і азначаем яго праз AB *або* (курсыў мой, Ч. Д.) BA.“

Значыць, адрэзак BA паводле гэтага паясьненьня тое самае, што і адрэзак AB.

Калі мы адкінем 23., дык ня можам ужо карыстацца довадам A. Розэнталя (О. Вольбэрг, Увагі цытаваныя, старонка 140, 2⁰) дзеля залежнасьці 22. Але ўсё-ж-такі 22. залежны, бо паводле постуляту паўнаты даводзіцца ня толькі 20., але і адваротны : што існуе такі пункт B', які здавальняе першым умовам III, 1 і дзеля якога A'B' = AB; а калі мы напішам два разы: A'B'=AB; A'B'=AB; дык паводле III, 2. будзе : AB=AB, што і трэба было давесьці.

Апрача 20., 22. і 23., залежны і 21. паводле доваду Розэнталя (гл. Вольбэрг, старонка 140, 1⁰).

Значыць, увесь III, 1. з усімі яго чатырма выказаньнямі, залежны, і гэта нават без разьвіненьня сыстэмы Гільбэрта!

III, 2. (24.) : Калі адрэзак AB конгруэнтны як адрэзку A'B', гэтак і адрэзку A" B", дык і A'B' конгруэнтны адрэзку A" B".

Гэты постулят незалежны, калі мы ня ўводзім ніякага конструктыўнага азначэньня конгруэнтнасьці адрэзкаў (гл. далей).

III, 3. (25. :) Няхай будуць AB і BC два адрэзкі на простай *a* бяз супольных пунктаў : далей хай будуць A'B' і B'C' два адрэзкі на гэтай самай або на іншай простай *a'* таксама бяз супольных пунктаў (апрача B і B', зразумела; зрэшта пры Гільбэртаўскім азначэньні адрэзка гэта нам нічога не гаворыць!). Калі пры гэтым AB=A'B' і BC=B'C', дык заўсёды таксама AC=A'C'."

Залежнасьць гэтай аксыёмы пры некаторым разьвіненьні сыстэмы Гільбэрта без парушэньня яе духу мы пакажам далей.

III,4. Хай будзе даны кут (h, k) у роўніцы і простая a' ў роўніцы, а таксама азначаны адносна a' бок роўніцы. Хай h' азначае прамень простай a', які выходзіць з пункту O' : тады ў роўніцы (26. :) існуе адзін і (27. :) толькі адзін прамень k' такі, што кут (h, k) конгруэнтны куту (h', k'), і разам з гэтым унутраныя пункты кута (h', k') ляжаць па даны бок ад a'. (28. :) Кожны кут конгруэнты сабе самаму, г. ё.заўсёды кут(h, k)= =(h. k) і (29. :) кут (h. k)=(k, h).

29. непатрэбна, таму што ў паясьненьні другім § 5 сказана: „Хай будзе α якая-колечы роўніца, а h, k — якія-колечы два розныя праменьні, якія выходзяць з пункту O ў роўніцы α і належаць да розных простых. Сыстэму гэтых праменьняў h, k мы называем кутам і азначаем (h, k) *або* (курсыў мой, Ч.Д.) (k, h)."

28. мы даведзем толькі адначасова з III, 5. 26. выцякае з постуляту паўнаты. 27. незалежны ў тых самых ўмовах, што і 24. (калі ўсе адрэзкі лічыць роўнымі, дык толькі ён з тых постулятаў, якіх залежнасьць мы тутака не даводзім, ня будзе здаволены).

На падставе постуляту паўнаты магчыма давесьці і 26. з такой зьменай, што не (h, k)=(h',k'), але наадварот (h',k')= =(h, k) : а тады магчыма давесьці па Розэнталю тэорэму 10 (Вольбэрг, стар. 141 унізе) і потым, як вышэй 22., даведзем залежнасьць 28.-га. Прасьцей гэта будзе разам з III, 5.

III, 5. „Калі для 2 трыкутнікаў ABC і A'B'C' адрэзак AB=A'B', AC=A'C', кут BAC=B'A'C', дык заўсёды і (30. :) кут ABC=A'B'C', і (31. :) кут ACB=A'C'B'.

Тутака 31., зразумела, залежна ад 30. : досыць пераставіць парадак першых 2 роўнасьцяў ува ўмовах постуляту 30., як з яго атрымаем 31.

30. будзе залежны, калі ўвядзем па Вэронэзе і Мольлерупу азначэньне, што 2 куты роўны, калі належаць да двойкі трыкутнікаў з адпаведна роўнымі (конгруэнтнымі) бакамі.

Адносна іншых постулятаў гэткае азначэньне роўнаважна 30.

Довады 30. і 25. пры прынятых азначэньнях досыць складаныя. Пры гэтым трэба ў паясьненьні другім § 5 адкінуць абмежаваньне, згодна з якім праменьні h, k належаць абавязкова да *розных* простых.

Я выведу перш-на-перш з постуляту паўнаты такі постулят (пар. Мольлеруп IV, цытаты Вольбэрга ўва ўвазе[5]) на старонцы 139):

Тэорэма *M*: Калі AB = CE і I — які-колечы пункт, дык у кожнай паўроўніцы з кантам, які праходзіць праз C і праз E, існуе такі пункт H, што AI=CH і BI=EH.

(Пры гэтай тэорэме магыма абмежаваць 20. да патрабаваньня, каб існавалі два такія пункты X і Ц, што калі A і B — якія-колечы два пункты, дык існуе такі пункт C, што B ляжыць паміж A і C і што адрэзак BC=XЦ („адзінцы“)).

Перш-на-перш трэба заўважыць, што без III, 5 адпадае довад Розэнталя для 21. Значыць, нам трэба давесьці 21., 30. і 25.

Лема А.—Ніякі ўласьцівы адрэзак не=неўласьціваму AA.

Довад : 1. выпадак : $AA \neq AB$.

Дапусьцім адваротнае. Тады паводле тэорэм існаваньня існуе пункт C па-за простай AB, а тады па тэорэме M існуе дзесьці такі пункт E, што AE=AC і (ад „другога канца“ AA) AE=BC.

Тады па III, 2 будзе AE=BE,

Але па II, 2 існуе і такі пункт H, што C ляжыць паміж A і H. Ізноў мы давядзем таксама, што AH=BH.

Але з гэтага на падставе азначэньня роўнасьці кутоў выцякае як:

CAB = ABC,

гэтак і :

HAB = ABH,

што ўжо супярэчыць 27.

(Чытач сам зробіць малюнкі паводле апісаньня).

Гэты довад даў мне гр. Гэнрык Капланьскі з Варшавы.

Выпадак II: Калі AA = BC і A не зьяўляецца канцом адрэзка BC, тады паводле тэорэм існаваньня існуе пры A ўласьцівы адрэзак AE=BC, значыць, паводле вынікаў з III, 2

будзе АА=АЕ, як у першым выпадку, што немагчыма, як вышэй даведзена.

Цяпер мы можам ужо давесьці 21. Калі АВ=АС і В ляжыць паміж А і С — да чаго гэта паводле III, 2 зводзіцца, дык паводле тэорэм існаваньня існуе пункт Е па-за простай АС, потым паводле I, 1 простая АЕ, тады паводле II прамень АЕ, а ў ім паводле 20. такі пункт Н, што АВ = АН. Тады па тэорэме М існуе з другога боку простай ВН такі пункт I, што ВI=ВА, НI=НА, і мы паводле III, 2 атрымоўваем ромб ВАНI, у якім паводле 27. дыягоналі мусяць ляжаць унутры. Паводле азначэньня роўнасьці кутоў будуць роўны куты ВАI і НАI, але таксама і ВIА і НIА.

Цяпер заўважым, што паводле 27. і тэорэмы М мы ўжо можам карыстацца тэорэмай аб двух трыкутніках, якія маюць па роўнаму баку і па адпаведна роўным двум кутам пры ім. (Таксама ўжо можам давесьці, што трыкутнік з двума роўнымі кутамі абавязкова мае процілеглыя гэтым кутам бакі роўныя).

Значыць, калі О ёсьць пункт супольны дыягоналяў ВН і АI, тады трыкутнікі IОВ і IОН роўныя, і куты, таксама азначаныя, таксама роўныя.

Але калі Ц ёсьць пункт супольны праменю АI і адрэзка СН, дык таксама даведзем, што куты НЦО і СЦО роўныя. Але тады, калі М ёсьць існуючы паводле тэорэмы М такі пункт, што ЦМ = ЦН і ОМ = ОН, і М ляжыць па тэй бок простай ЦО, што В і С, дык мы абавязкова ўпадаем у супярэчнасьць або з 27., або з I, 2.

Далей мы ўжо можам давесьці постулят Вэронэзэ—Моль-лерупа V (loc. cit., гл. таксама Гуардучы у Зборы артыкулаў пад рэд. Энрыквэса пад заголоўкам „Вопросы элементарной геометрии"). Гэта няцяжка пры дапамозе тэорэмы М, 27. і 21.

Трэба толькі заўважыць, што пры нашым пашырэньні паняцьця кута і адпаведна сэнсу 27., усе дагэтуль даведзеныя тэорэмы могуць датыркацца і да неўласьцівых і паўпоўных кутоў.

Гэта трэба мець на ўвазе пры довадзе III, 3 Гільбэрта, да якога мы і пераходзім.

Калі В ляжыць паміж А і С, а В' паміж А' і С', ды яшчэ АВ=А'В', ВС=В'С', дык наводле V,2 і I,4 ёсьць паўроўніца з кантам АВ, а ў ёй паводле тэорэмы М ёсьць такі пункт G, што AG=А'С', BG=В'С' (чытач сам паступова найлепш зробіць малюнак).

Няхай будзе Н такі пункт праменю АС (гэткі пункт існуе паводле III,1), што АН=А'С'. Тады паводле Мольл. V будзе

HG=C'C', значыцца паводле вышэй даведзенага павінна быць G тожсама з H, інакш гэта немагчыма.

Значыцца, BH = B'C'.

Калі-б пункт H ляжаў паміж A і B, дык паводле III, 1 існаваў бы такі пункт K праменю HB, што HK=HA=A'C'.

З C'A'=HA, C'B'=HB, A'B'=AB, C'A'=HK выцякае паводле Мольл. V A'A'=AK, значыцца K тожсамы з A.

K ня можа быць тады тожсама з B, бо тады A было-б тожсама з B, што немагчыма, калі B ляжыць паміж A і C.

Значыцца, павінна B ляжаць паміж H і K, або K паміж H і B, а паводле постулятаў упарадкаваньня і B паміж A і K, або K паміж A і B, г. ё. пры тожсамасьці K і A: B паміж A і A або A паміж A і B. Але гэтыя палажэньні паводле II групы постулятаў немагчымы.

Значыць, H тожсама з B або B ляжыць паміж A і H. Але пры H тожсамым з B было-б, з прычыны BH= =B'C' : BB=B'C', значыць B' тожсама з C', што немагчыма, калі B' ляжыць паміж A' і C'.

Значыць, няўхільна B ляжыць паміж A і H. Але тады H ляжыць у прамені BC, а з прычыны BH=B'C'=BC мы маем BH=BC, скуль паводле 21. H тожсама з C. Значыць, AC=A'C', што і трэба было давесьці.

III, 5 вельмі проста выводзіцца з Мольл. V, які дае адназначнасьць азначэньня роўнасьці кутоў.

Вэблн давеў (loc. cit., разьдзел III), што пры адпаведных проектыўна-візуальных азначэньнях роўнасьці кутоў і адрэзкаў *усе* аксыёмы III групы Гільбэрта залежныя.

Постулят V, 1 (Архімэда) залежны пры аксыёме паўнаты, таму што з яе выцякае „аксыёма Дэдэкінда“ (гл. увагі Вольбэрга), а з яе ўжо пры аксыёмах конгруэнтнасьці (III група) выцякае аксыёма Архімэда (гл. Гуардучы, loc cit.)

Постуляты IV і V, 2 незалежны, што даведзена Клейнам і Гільбэртам.

Значыць, з 34 выказаньняў постулятаў Гільбэрта незалежны толькі 3., 12., 18., IV і V, 2.

RÉSUMÉ.

Sur le systeme de D. Hilbert.

Dombroski (Minsk).

On croit ordinairement que la droite de David Hilbert n'est guère un ensemble de points. Mais il suffit de consulter l'„Erklärung“ que donne Hilbert pour la demi-droite, pour voir qu'Hilbert n'a pas pu se défaire de l'idée de droite comme ensemble de points.

Il serait inconséquent de s'arrêter à la droite.

En liant les notions fondamentales de la géométrie par quelques définitions constructives, on peut omettre un grand pourcent d'axiomes de D. Hilbert. En particulier, le „Vollständigkeitsaxiom“ rend superflus tous les axiomes existentionnels

BERICHTIGUNG.

Im № 17-18 (1928) der „Annales de l'Université de la Blanche-Ruthénie“, in dem Artikel von Cz. Dąbrowski in Minsk „Einige Vereinfachungen des geometrischen Axiomensystems von Oswald Veblen und das Problem seiner weiteren Unvereinfachbarkeit“, sollen die Absätze 7), Seite 207, und 8), Seite 208, umgestellt werden. Die Zeile 22, Seite 208, soll lauten: „8)und 4) beweisen das Axiom IV O. Veblens vollständig“. Seite 208, Zeilen 13—15, „(da A, A, E Cl bei $E \neq B$ nach 2) E, B, A Cl geben würde, und wir schon die Unmöglichkeit von A, B, E Cl bewiesen haben)“ soll gestrichen werden. Seite 208, Zeile 16, nach „$E \neq C$“ soll „(nach 7))“ folgen. Dieselben Worte „(nach 7),“ sollen auch Seite 208, Zeile 13, an der Stelle der gestrichenen (siehe oben) Worte gestellt werden.

Č. Dąbrowski.

Аб аднэй альгебраічнай тэорэме.

Ц. Бурстын у Менску.

У гэтай кароткай працы мы разьвяжам альгебраічную задачу, якую я паставіў ў маёй працы „Геомэтрыя двойчы працяжных мностаў F_2 у проектыўны R_4 [1]).

Няхай будзе p які-небудзь дадатны цэлы лік, тады мы будзем шукаць мноства ўсіх квадратычных матрыц: $A = \| a_{ik} \|$; $i, k = 1, 2, \ldots n$, дзеля якіх мае моц роўнасьць

$$A^p = E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

дзе $E = \| \delta_{ik} \|$ ёсьць матрыца адзінак.

Каб поўнасьцю разьвязаць задачу, мы спачатку пераведзем матрыцу A шляхам неасаблівай лінійнай трансформацыі B у нормальную форму A_N. Будзе, значыцца:

$$A_N = BAB^{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

і з (1) і (2) вынікае тады, як відаць:

$$A_N^p = E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Наша задача будзе, значыцца, зьведзена да задачы знайсьці ўсе матрыцы нормальнае формы, дзеля якіх мае моц (3). На самай справе з (3) вынікае суадносіна (1); дзеля гэтага, калі мы знайшлі мноства ўсіх матрыц A_n, тады мноства ўсіх матрыц A, дзеля якіх мае моц (1), мае форму:

$$A = B^{-1} A_N B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

прычым B ёсьць нейкая неасаблівая квадратычная матрыца.

Значыцца, калі A_N ёсьць нормальная матрыца, тады A_N мае форму:

$$\left\| \begin{matrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_h \end{matrix} \right\| \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

[1]) Гл. „Tohoku Math. Journal, Volum, 30 лютага 1929, старонка 422, заўвага ў нізе „[1])“.

прычым

$$M_k = \left\| \begin{matrix} \alpha_k & \beta_k & 0, & 0, & . & . \\ 0, & \alpha_k, & \beta_k, & 0, & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0, & 0, & . & . & \alpha_k, & \beta_k, \\ 0 & 0 & . & . & 0 & \alpha_k \end{matrix} \right\| \quad . \; k=1,2,..h \; . \quad (6)$$

З (1) і (6) вынікае, што:

$$A_n^p = \left\| \begin{matrix} M_1^p & & & \\ & M_2^p & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_h^p \end{matrix} \right\| = E \quad \ldots \quad (7)$$

Каб магчы лёгка разглядаць (7), мы напішам элемэнты матрыц M_k (6) у сыметрычнай форме. Лёгка відаць, што магчыма напісаць элемэнты $_{(1)}\, b_{rs}^{(k)}$ матрыцы M_k наступным чынам:

$$_{(1)}\, b_{rs}^{(k)} = \alpha_k\, \delta_{r,s} + \beta_k,\; \delta_{r,s-1} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Але:

$$\delta_{rs}\, \delta_{s+j,t} = \delta_{r+j,t} = \delta_{r,t-j} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Мы абазначым цяпер элемэнты $_{(2)}\, b_{rt}^{(k)}$ матрыцы M_k^2 З (8) і (9) вынікае, што:

$$_{(2)}\, b_{rt}^{(k)} = {}_{(1)}\, b_{rs}^{(k)}\; {}_{(1)}\, b_{st}^{(k)} = (\alpha_k\, \delta_{r,s} + \beta_k,\, \delta_{r,s-1})\, (\alpha_k\, \delta_{st} + \beta_k,\, \delta_{st}) =$$
$$= \alpha_k^2\, \delta_{rt} + \alpha_k\, \beta_k,\, \delta_{r,t-1} + \alpha_k\, \beta_k,\, \delta_{r,t-1} + \beta_k,\, \beta_k,\, \delta_{r,t-2} = \alpha_k^2\, \delta_{rt} + 2\, \alpha_k\, \beta_k,\, \delta_{r,t-1}, + .\, \delta_{r,t-2}\text{[2]}). \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Аналёгічна мы абазначым элемэнты $_{(3)}\, b_{ru}^{(k)}$ матрыцы M_k^3. З (10) і (9) вынікае, што:

$$_{(3)}\, b_{ru}^{(k)} = {}_{(2)}\, b_{rt.}^{(k)}\; {}_{(1)}\, b_{tu} = (\alpha_k^2\, \delta_{rt} + 2\, \alpha_k.\, \beta_k,\, .\, \delta_{r,t-1} + .\, \delta_{r,t-2})\, .$$
$$.(\alpha_k\, \delta_{t,u} + \alpha_k\, .\, \beta_k,\, \delta_{t,u-1}) = \alpha_k^3\, \delta_{ru} + 2\, \alpha_k^2\, \beta_k.\, \delta_{r,u-1} + .\, \delta_{r,u-2} +$$

[2]) Месцы, абазначаныя кропкай (.) азначаюць коэфіцыенты, дакладная знаёмасьць якіх няма ніякага значэньня дзеля нашага вылічэньня.

$$+\alpha_k^2\ \beta_k.\ \delta_{r,u-1} + .\ \delta_{r,u-2} = \alpha_k^3\ \delta_{r,u} + 3\ \alpha_k^2\ \beta_k,\ \delta_{r,u-1} + .\ \delta_{r,u-2}, + .$$
$$.\ \delta_{r,u-3}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \qquad (11)$$

Элемэнты (p) $b_{rv}^{(k)}$ матрыцы M_k^p магчыма вылічыць праз поўную індукцыю:

$$(p)\ b_{rv}^{(k)} = \alpha_k^p\ \delta_{r,v} + p\ \alpha_k^{p-1}\ \beta_{k_1}\ \delta_{r,u-1} + .\ \delta_{r,u-2} + \quad . \qquad (12)$$

З прычыны таго, што ў выніку (7) элемэпты (p) $b_{rv}^{(k)}$ роўны элемэнтам $\delta_{r,v}$ матрыцы E, мы атрымаем у выніку (12)

$$\alpha_k^p\ \delta_{r,v} + p\ \alpha_k^r\ \beta_k,\ \delta_{r,v-1} + .\ \delta_{r,v-2} + \ldots = \delta_{r,v}\ .\ . \qquad 13)$$

З таго, што r=v, вынікае тады з прычыны (13)

$$\alpha_k^p = 1\ ,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \qquad (14)$$

значыцца $\alpha_k = \sqrt[p]{1} = \varepsilon_k$ (ε_k — адзінaчны корань раўнаньня $x^p = 1$)
а з $r \neq v$, дзе $r = v-1$, вынікае тады з прычыны (13)

$$p\ \alpha_k^{p-1}\ \beta_k, = 0\ .\ \text{значыцца}\ \beta_k, = 0 \quad .\ .\ . \qquad (15)$$

дзеля ўсякіх r. Матрыца Mk мае, значыцца, з прычыны (14), (15), (6) форму:

$$M_k = \left\| \begin{array}{lll} \varepsilon_k, & 0, & 0\ .\ . \\ 0, & \varepsilon_k & 0 \\ & & \ddots \\ & & & \varepsilon_k \end{array} \right\| \quad .\ .\ ,\ . \qquad (16)$$

і дзеля гэтага матрыца A_N мае форму:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \begin{array}{l} \varepsilon_1, 0, 0\ .\ . \\ 0\ \varepsilon\ 0 \\ 0, 0, \varepsilon\ \ .\ . \\ 0,0,0,0, \varepsilon \end{array} & & \\ & \begin{array}{l} \varepsilon_2,\ 0,\ .\ .\ . \\ 0, \varepsilon_2, 0, .\ .\ . \\ .\ .\ .\ .\ \varepsilon_2 \end{array} & \\ & & \begin{array}{l} \varepsilon_h, 0, 0, .\ .\ . \\ 0,\ \varepsilon_h,\ .\ .\ . \\ 0, 0, \ldots \varepsilon_h, \end{array} \end{array} \right\| \quad .\ .\ . \qquad (17)$$

прычым ε_1 ε_2, . . ε_n ёсьць якія-небудзь p=ыя корні з адзінкі, якія могуць часткова або і ўсе быць роўнымі.

Паводле гэтага мноства ўсіх матрыц A, дзеля якіх (1) мае моц, ёсьць формы:

$$B^{-1} A_N B \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

прычым B ёсьць якая-небудзь неасаблівая матрыца, а A_n матрыца формы (17).

Гэтым мы, значыцца, цалком развязалі нашую задачу.

З а ў в а г а: з раўнаньня Hamilton'a і Cayley вынікае толькі частка нашае тэорэмы, менавіта, што ўсякая матрыца A, якой характарыстычным раўнаньнем зьяўляецца $x^p - 1 = 0$, ёсьць разьвязак раўнаньня

(1) [3]) Але гэта не дае ўсіх разьвязкаў раўнаньня $(1)_1$ тады як наш мэтод дае поўнае разьвязаньне гэтага раўнаньня.

Для $p=2$ *Громмэр* выказаў здагадку, што:

$$A_N = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & \varepsilon_n \end{Vmatrix}$$

дзе $\varepsilon_k = \pm 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

---

[3]) Глядзі M. Bocher. Einführung in die höhere Algebra, разьдзел XXII, § 101.

Über einen algebraischen Satz.

von C. Burstin in Minsk.

In dieser kurzen Note wollen wir eine algebraische Aufgabe, die ich in meiner Arbeit „Die Geometrie der zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten F_2 im projektiven R_4 „aufgestellt habe, lösen [1]).

Es sei p irgendeine positive ganze Zahl, dann suchen wir die Gesamtheit der quadratischen Matrizes $A = \| a_{ik} \|$; i, k= =1, 2,... n, für welche die Relation:

$$A^p = E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gilt, wobei $E = \| \delta_{ik} \|$ die Einheitsmatrix ist.

Um die Aufgabe vollständig zu lösen, bringen wir zuerst die Matrix A mittels einer nicht singulären linearen Transformation B auf die Normalform A_N. Es ist also:

$$A_N = BAB^{-1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

nnd aus (1) und (2) folgt dann, wie man sieht:

$$A_N^p = E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Unsere Aufgabe wird also zurückgeführt auf die Aufgabe, alle Matrizes der Normalform zu finden, für welche (3) gilt. Es folgt in der Tat, aus (3) die Relation (1); haben wir demnach die Gesamtheit der Matrizes A_N gefunden, dann ist die Gesamtheit der Matrizes A, für welche (1) gilt, von der Form:

$$A = B^{-1} A_N B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wobei B irgendeine nicht singuläre quadratische Matrix ist.

Ist also A_N eine Normalmatrix, dann ist A_N von der Form.

$$\left\| \begin{array}{cccc} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_h \end{array} \right\| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

---

[1]) Die Tohoku Math. Journal Volum, 30 Feber. 1929 Seite 422 Fussnote) [1]).

wobei

$$M_k = \left\| \begin{matrix} \alpha_k, & \beta_k, & 0, & 0 & . & . & . \\ 0 & \alpha_k, & \beta_k, & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0, & 0 & . & . & & \alpha_k, & \beta_k, \\ 0, & 0 & . & . & & 0, & \alpha_k \end{matrix} \right\| . \; k=1, 2,...h \quad (6)$$

ist. Aus (1) und (6) folgt; dass;

$$A_N^P = \left\| \begin{matrix} M_1^P & & & \\ & M_2^P & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_h^P \end{matrix} \right\| = E \quad . \; . \quad (7)$$

ist. Um (7) einfach zu behandeln können, schreiben wir die Elemente der Matrizes M_k (6) in einer symetrischen Form. Man sieht ohneweiters, dass man die Elemente $(_1)\, b_{rs}^{(k)}$ der Matrik M_k folgendermassen schreiben kann:

$$(_1)\, b_{rs}^{(k)} = \alpha_k\, \delta_{r,s} + \beta_k\, \delta_{r,s-1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Nun ist:

$$\delta_{r,s}\, \delta_{s+j,\,t} = \delta_{r+j,\;t} = \delta_{r,\;t-j} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Wir berechnen jetzt die Elemente $(_2)\, b_{rt}^{(k)}$ der Matrix M_k^2. Aus (8) und (9) folgt, dass:

$$(_2)\, b_{rt}^{(k)} = (_1)\, b_{rs}^{(k)}\; (_1)\, b_{st}^{(k)} = (\alpha_k\, \delta_{rs} + \beta_k\, \delta_{r,s-1})\, (\alpha_k\, \delta_{st} + \beta_k\, \delta_{s,t-1}) =$$
$$= \alpha_k^2\, \delta_{rt} + \alpha_k\, \beta_k\, \delta_{r,t-1} + \alpha_k\, \beta_k\, \delta_{r,t-1} + \beta_k,\, \beta_k,\, \delta_{r,t-2} = \alpha_k^2\, \delta_{rt} +$$
$$+ 2\, \alpha_k\, \beta_k\, \delta_{r,t-1} + .\, \delta_{r,t-2}\; ^{2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

(10) und (9) folgt, dass:

$$(_3)\, b_{ru}^{(k)} = (_2)\, b_{rt}^{(k)}\; (_1)\, b_{tu}^{(k)} = (\alpha_k^2\, \delta_{rt} + 2\, \alpha_k\, \beta_k,\, \delta_{r,t-1} + .\, \delta_{r,t-2})\, .$$
$$(\alpha_k\, \delta_{tu} + \beta_k,\, \delta_{t,u-1}) = \alpha_k^3\, \delta_{tu} + 2\, \alpha_k^2\, \beta_k\, \delta_{r,u-1} + .\, \delta_{r,u-2} + \alpha_k^2\, \beta_k,$$
$$\delta_{r,u-1} + .\, \delta_{r,u-2} = \alpha_k^3\, \delta_{r,u} + 3\, \alpha_k^2\, \beta_k\, \delta_{r,u-1} + .\, \delta_{r,u-2} + .\, \delta_{r,u-3} \quad (11)$$

---

[2]) Die mit. bezeichneten Stellen bedeuten Koeffizienten, deren genaue Kenntnis für unsere Berechung von keiner Bedeutung ist. In allen Formeln ist k kein Summationsindex.

Die Elemente (p) $b_{rv}^{(k)}$ der Matrix M_k^p kann man dann durch vollständigc Induktion berechnen:

$$(p)\ b_{rv}^{k} = \alpha_k^p\, \delta_{rv} + p.\ \alpha_k^{p-1}\, \beta_k,\ \delta_{r,v-1} + .\ \delta_{r,v-2} + \quad . \qquad (12)$$

Da zufolge (7) die Elemente (p) $b_{r,v}^{(k)}$ gleich den Elementen $\delta_{r,v}$ der Matrix E sind, erhalten wir zufolge (12)

$$\alpha_k^p\, \delta_{r,v} + p.\ \alpha_k^{p-1}\, \beta_k,\ \delta_{r,v-1} + .\ \delta_{r,v-2} + \ldots = \delta_{r,v}, \quad . \qquad (13)$$

Aus $r = v$ folgt dann zufolge (13)

$$\alpha_k^p = 1, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (14)$$

also $\alpha_k = \sqrt[p]{1} = \varepsilon_k$ (ε_k eine Einheitswurzel der Gleichnng $x^p = 1$) und aus $r \neq v$ wobei $r = v - 1$ ist, folgt dann zufolge (13)

$$p.\ \alpha_k^{p-1} \beta_k = 0, \text{ also } \beta_k = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \qquad (15)$$

für alle r. Die Matrix M_k hat also zufolge (14), (15), (6) die Form:

$$M_k = \left\| \begin{array}{lll} \varepsilon_k, & 0, & 0, \ldots \\ 0, & \varepsilon_k, & 0, \\ & & \\ & & \\ 0, & 0 \ldots & \quad \varepsilon_k \end{array} \right\| \quad . \ . \ . \ . \qquad (16)$$

nnd demnach die Matrix A_n die Form:

$$A_n = \left\| \begin{array}{lll} \begin{array}{l} \varepsilon_1, 0, \ldots \\ 0, \ \varepsilon_1 \ldots \\ 0, 0\ \varepsilon_1 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0, 0, 0 \ldots \varepsilon_1 \end{array} & & \\ & \begin{array}{l} \varepsilon_2, 0, \ldots \\ 0, \varepsilon_2, \ldots \\ \ \ldots\ldots \\ 0, 0, \ldots \varepsilon_2 \end{array} & \\ & & \begin{array}{l} \ldots\ldots \\ \varepsilon_h, 0, \ldots \\ 0, \varepsilon_h \ \ldots \\ 0, 0 \ldots \varepsilon_h \end{array} \end{array} \right\| \quad . \ . \ . \ . \qquad (17)$$

wobei $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_h$ irgendwelche p=te Einheitswuvzeln sind, welche zum Teil, oder auch alle gleich sein können.

Es ist demnach die Gesamtheit der Matrizes A, für welche (1) gilt von der Form:

$$B^{-1} A_N B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

wobei B irgendeine nicht singuläne Matrix und A_n eine Matrix der Form (17) ist.

Wir haben damit also unsere Aufgabe vollständig gelöst.

Bemerkung: Aus der Hamilton—Cayley'schen Gleichung folgt nur ein Teil unseres Satzes, nämlich, dass jede Matrix A, deren charakteristiche Gleichung $x^p - 1 = 0$ ist, eine Lösung der Gleichung (1) ist [3]. Dies gibt aber nicht alle Lösungen der Gleichung (1), während unsere Methode die vollstandige Lösung dei Gleichung (1) angibt.

Für p=2 hat *Grommer* die Vermutung ausgesprochen, dass

$$A_n = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & 0, & 0, & \ldots & \ldots & \cdot \\ 0, & \varepsilon_2 & 0, & \ldots & \ldots & \cdot \\ 0_1 & 0 & \varepsilon_3 & \ldots & \ldots & \cdot \\ 0_1 & 0, & \ldots & \ldots & \ldots & \varepsilon_n \end{Vmatrix}$$

ist, wobei $\varepsilon_k = \pm 1$ ist $(k = 1, 2 \ldots n)$.

---

[3]) Siehe: M. Bocher: Einführung in die höhere Algebra: Kapitel XXII § 101.

Цыркулярныя крывыя 3-га парадку [1]).

Ул. Дыдырка (Менск).

ГЛАВА IV.

Мэтрычныя ўласьцівасьці цыркулярных крывых.

(Працяг).

§ 9. Аб пучку цыркулярных крывых.

Калі возьмем дзьве цыркулярныя крывыя $U=O$ і $V=O$, где $U=(ax+by)(x^2+y^2)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$. (44)
$V=(a_1x+b_1y)(x^2+y^2)+A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1$. (45)

Тады раўнаньне

$$U-\lambda V=O$$

будзе вызначаць пучок цыркулярных крывых. $U=O$ і $V=O$ будуць асноўныя крывыя пучку. (см. гл. I § 8).

З тэй прычыны, што пучок крывых 3-га парадку мае восем цэнтраў (гл. I, § 8, стар. 10-11), то пучок цыркулярных крывых 3-га пар. можа мець ня больш шасьці сапраўдных цэнтраў.

(Два цэнтры пучку заўсёды будуць у кругавых I і J). Калі асноўныя крывыя пучку распадаюцца на простую і акружыну, то раўнаньне пучку можа быць напісана так:

$$P.\overline{Q}-\lambda.R.\overline{S}=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (46)$$

где P і Q лінейныя выразы адносна x і y, а $\overline{Q}$ і $\overline{S}$ левыя часткі раўнаньняў акружын.

Уключыўшы λ у выраз R, мы можам напісаць раўнаньне пучку так:

$$PQ-R.S=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (47)$$

альбо

$$\frac{P}{R}=\frac{S}{Q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (48)$$

Прыраўнаўшы кожны з стасункаў (48) h, мы знойдзем, што раўнаньне (48) эквівалетна гэткай сыстэме:

$$P-h.R=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (49)$$
$$S-h.Q=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (50)$$

[1]) Працяг (пачатак гл. № 17—18 „Прац Б. Дз. У.“).

Такім чынам, мы маем пучок лучоў (49) і проектыўны да яго пучок акружын (50). Палучаем вядомую тэорэму аб утварэньні цыркулярнай крывой пры дапамозе двох проектыўных пучкоў, прычым цэнтры абодвых пучкоў таксама ляжаць на крывой. (гл. I § 13) [1]). Для адвольнай цыркулярнай крывой магчыма скласьці пучок віду (47). Для гэтага трэба адпаведным чынам падабраць яго цэнтры.

Пры адвольным распалажэньні шасьці сапраўных цэнтраў пучку цырк. крывых, не заўсёды магчыма правесьці праз іх цыркулярныя крывыя, якія распадаюцца на простую і акружыну.

Для гэтага патрэбна, каб тры з цэнтраў ляжалі на аднэй простай, альбо 4 на аднэй акружыне. Ніжэй разгледзім выпадак, калі 6 цэнтраў пучку ўтвораны злучэньнем чатырох простых.

§ 10. Знойдзем аналітычную ўмову распадзеньня цыркулярнай крывой на простую і акружыну.

Раўнаньне цыр. крывой у агульным відзе мае 7 парамэтраў, раўнаньне простай—два парамэтры, раўнаньне акружыны—тры парамэтры. Такім чынам, параўнаўшы раўнаньне цыр. крывой з раўнаньнем, якое палучыцца ад перамножаньня левых частак раўнаньняў простай і акружыны, мы будзем мець 7 раўнаньняў для знаходжаньня пяці невядомых. Гэта вызначае, што па выключэньні 5 парамэтраў з 7 раўнаньняў, мы палучым дзьве залежнасьці паміж коэфіцыентамі раўнаньня цыркулярнай крывой.

Гэтыя залежнасьці магчыма палучыць у больш сымэтрычнай форме наступным чынам:

Возьмем раўнаньне цыркулярнай крывой:

$$(ax+by).(x^2+y^2)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=T \quad . \quad (51)$$

і напішам яго ў гэткай форме:

$$(ax+by+\gamma).(x^2+y^2)+(A-\gamma)x^2+Bxy+(C-\gamma)y^2+Dx+Ey+ \\ +F=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (52)$$

где γ пакуль што неазначана.

Раўнаньне (52) разложыцца на раўнаньне простай і акружыны ў тым выпадку, калі конічнае сячэньне:

$$(A-\gamma)x^2+Bxy+(C-\gamma)y^2+Dx+Ey+F=O \quad . \; . \quad (53)$$

раскладаецца на пару простых, з якіх адна будзе:

$$ax+by+\gamma=O$$

[1]) Зразумела, самае пабудаваньне пунктаў крывой будзе адрозьнівацца ад паказанага ў § 16 гл. I, бо адпаведныя элемэнты проектывітэту могуць быць палучаны рознымі спосабамі.

Як вядома, кутавыя коэфіцыенты простых, на якія распадаецца крывая 2-га парадку, k_1 і k_2 знаходяцца з раўнаньня:

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = O, \text{ але ў нас } k_1 = -\frac{a}{b}$$

Значыцца: $-\frac{a}{b} + k_2 = -\frac{B}{C-\gamma}$ і $-\frac{a}{b}\cdot k_2 = \frac{A-\gamma}{C-\gamma}$. (54) і (55)

З раўнаньня (55)

$$k_2 = -\frac{b}{a}\cdot\frac{A-\gamma}{C-\gamma}, \text{ а з (54)}$$

$$-\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\cdot\frac{A-\gamma}{C-\gamma} = -\frac{B}{C-\gamma} \quad . \; . \; . \; . \quad (56)$$

Адкуль

$$\gamma = \frac{a^2C + b^2A - B\,.\,a\,.\,b}{a^2 + b^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (57)$$

γ ёсьць, як няцяжка заўважыць, вольны член у раўнаньні сапраўднай асымптоты крывой (гл. I § 2, формула 10).

Простая: $ax + by + \gamma = O$ павінна таксама прайсьці праз цэнтр крывой (53), г. зн. праз пункт, які азначаецца сыстэмаю раўнаньняў

$$\begin{aligned} 2(A-\gamma)\,.\,x + By + D &= O \\ B\,.\,x + 2(C-\gamma)\,y + E &= O \end{aligned} \quad . \; . \; . \; . \quad (58)$$

Калі знойдзем x і y з сыстэмы (58) і падставім іх выразы ў раўнаньне $ax + by + \gamma = O$, то палучым:

$$a\begin{vmatrix} \frac{D}{2}, & \frac{B}{2} \\ \frac{E}{2}, & C-\gamma \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} A-\gamma, & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2}, & \frac{E}{2} \end{vmatrix} - \gamma\begin{vmatrix} A-\gamma, & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C-\gamma \end{vmatrix} = O \;.\; (59)$$

Умову (59) магчыма запісаць у форме дэтэрмінанту 3-га парадку:

$$\begin{vmatrix} A-\gamma, & \frac{B}{2}, & a \\ \frac{B}{2}, & C-\gamma, & b \\ \frac{D}{2}, & \frac{E}{2}, & \gamma \end{vmatrix} = O \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (60)$$

Такім чынам, умовы распадзеньня цыркулярнай крывой на простую і акружыну могуць быць напісаны ў форме двох дэтэрмінантаў 3-га парадку:

$$\begin{vmatrix} A-\gamma, & \frac{B}{2}, & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2}, & C-\gamma, & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2}, & \frac{E}{2}, & F \end{vmatrix} = O \text{ і } \begin{vmatrix} A-\gamma, & \frac{B}{2}, & a \\ \frac{B}{2} & C-\gamma, & b \\ \frac{D}{2}, & \frac{E}{2}, & \gamma \end{vmatrix} = O \,. \quad (61)$$

где γ узята з формулы (57).

Першая ўмова ёсьць дыскрымінант крывой (53), другая—той-жа дыскрымінант, у якім элемэнты апошняй колёны заменены адпаведна коэфіцыентамі раўнаньня сапраўднай асымптоты:

a, b і γ.

Прыклад

$$(3x+5y)(x^2+y^2)-10x^2-2xy+32y^2-23x-13y-10=O \,. \quad (62)$$

У даным выпадку

$$\gamma=\frac{9.32-25.10+2.3.5}{9+25}=2.$$

$$\begin{vmatrix} -12, & -1, & -\frac{23}{2} \\ -1, & -30, & -\frac{13}{2} \\ -23, & -\frac{13}{2}, & -10 \end{vmatrix} = 4107-4107=O \quad \begin{vmatrix} -12, & -1, & 3 \\ -1, & 30, & 5 \\ -\frac{23}{2}, & -\frac{13}{2}, & 2 \end{vmatrix} = -1110+1110=O$$

Абедзьве ўмовы здавальняюцца.

Крывая (62) распадаецца на простую: $3x+5y+2=O$ і акружыну. Тры апошніх члены яе раўнаньня палучым разьдзяліўшы многачлен:

$-12x^2-2xy+30^2-23x-13y-10$ на $3x+5y+2$, у дзелі будзе:

$$-4x+6y-5$$

У выніку будзем мець:

$$(3x+y+2)(x^2+y^2-4x+6y-5)=O \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

Прыклад 2. Напісаць раўнаньне распадаючайся цырк. крывой, для якой $\gamma=1$, а першая ўмова будзе мець выгляд:

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 4 \\ 3, & 4, & 5 \end{vmatrix} = O$$

Адсюль:

$A-\gamma=1;\ A=2;\ B=4;\ D=6;\ C-\gamma=3;\ C=4;\ E=8;\ F=5.$

$$\gamma=\frac{a^2C+b^2A-Bab}{a^2+b^2}=1.$$

$$4a^2+2b^2-4ab=a^2+b^2, \text{ альбо: } 3a^2-4ab+b^2=O$$

Другая ўмова ў даным выпадку будзе:

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & a \\ 2, & 5, & b \\ 3, & 4, & 1 \end{vmatrix} = O$$

альбо: $-a+2b-1=O$, г. зн. $a=2b-1$. Падставіўшы выраз a ў папярэдняе раўнаньне, палучым: $3.(2b-1)^2-4b(2b-1).+b^2=O$.

Па спрошчаньні

$$5b^2-8b+3=O;\ b=\frac{4\pm\sqrt{16-15}}{5};\ b_1=1;\ b_2=\frac{3}{5}.$$

Значыцца:

$$a_1=1\quad a_2=\frac{1}{5}.$$

Шуканыя цыркулярныя крывыя будуць:

1) $(x+y).(x^2+y^2)+2x^2+4xy+4y^2+6x+8y+5=O$. Яна раскладаецца на $x+y+1=O$ і $x^2+y^2+x+3y+5=O$.

2) $(x+3y+5).(x^2+y^2)+5x^2+20xy+15y^2+30x+40y+25=O$. Другое раўнаньне распадаецца на: $x+3y+5=O$ і $x^2+y^2+5x+5y+5=O$.

Палучаюцца дзьве цыркулярныя крывыя, у якіх сапраўдныя асымптоты палучым, калі прыраўняем да O кожны з множнікаў, на якія распадаецца ў даным выпадку раўнаньне конічнага сячэньня (53).

Каардынаты цэнтру акружыны і заўсёды супадаюць з каардынатамі паасобнага фокусу цырк. крывой.

Умовы (61) зьвяртаюцца ў тожсамасьці для канонічнай формы цыркулярнай крывой: $(x+A)(x^2+y^2)+Dx+Ey+F=O$.

У гэтым выпадку ўмовы распадзеньня відавочна будуць: $E=O$ і $F=AD$. Яны-ж лёгка могуць быць палучены па агульнаму методу.

Пакажам у заключэньне ўмовы распадзеньня цырк. крывой, на тры простых (яе асымптоты).

Няхай раўнаньне данай цырк. крывой будзе:

$$(ax+by).(x^2+y^2)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=O \quad . \quad (64)$$

Калі яна распадаецца на 3 простыя, то яе раўнаньне павінна мець форму:

$$(mx+ny+p).[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]=O \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

где m n і p коэф. раўнаньня сапраўднай асымптоты крывой а α і β координаты цэнтру (паасобнага фокусу) крывой.

Раўнаньпе (65) па расчыненьні дужак палучае выгляд:

$$(mx+ny)(x^2+y^2)+(p-2m\alpha).x^2-2(n\alpha+m\beta)xy+(p-2n\beta)y^2+$$
$$+[m(\alpha^2+\beta^2)-2p\alpha]x+[n(\alpha^2+\beta^2)-2p\beta]y+p(\alpha^2+\beta^2)=O \quad . \quad (66)$$

З параўнаньня раўнаньняў (64) і (65), знойдзем наступныя залежнасьці паміж іх коэфіцыентамі:

1) $m=a$
2) $n=b$
3) $p-2m\alpha=A$
4) $n\alpha+m\beta=-\frac{B}{2}$
5) $p-2b\beta=C$
6) $a(\alpha^2+\beta^2)-2p\alpha=D$
7) $b(\alpha^2+\beta^2)-2p\beta=E$
8) $p(\alpha^2+\beta^2)=F$

Падставіўшы выраз p з (3) у (6^e); (7^e) і (8^e) мы палучым тры ўмовы распадзеньня цыркулярнай крывой на тры простых:

$$a\beta^2-2A\alpha-3a\alpha^2=D;$$
$$b\alpha^2-2C.\beta-3b.\beta^2=E; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$
$$(A+2a\alpha).(\alpha^2+\beta^2)=F;$$

Раўнаньні (1), (2) і (3) даюць невядомыя параметры m, n і p для раўнаньня (65). Раўнаньні (4) і (5) зьяўляюцца тожсамасьцямі [см. гл. I, § 2 фор. 14].

Умоў распадзельня і павінна быць 3, з тэй прычыны, што раўнаньне цыркул. крывой мае 7 параметраў, раўнаньне сапраўднай асымптоты 2 параметры, раўнаньні дзьвёх уяўных асымптот—2 параметры. Такім чынам, трэба знайсьці чатыры параметры, а ўмоў мы маем 7.

У часным выпадку, калі раўнаньне крывой дана ў канонічнай форме

$$(x + A) . (x^2 + y^2) + Dx + F = O \quad . \ . \ . \quad (69)$$

то ўмовы яе распадзеньня на 3 простых відавочна будуць:

$$D = O; \ E = O; \ F = O \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (70)$$

То-ж самае дадуць і ўмовы (69) пры $a=1$; $b=O$; $\alpha=O$; $\beta=O$.

Прыклад. Ці распадаецца на тры простых цыркулярная крывая:

$$(x+2y)(x^2+y^2)-4x^2-16xy-6y^2+x+18y+26=O.$$

Тут $\alpha=3$; $\beta=2$; $\gamma=2$.

Умовы (68)

$$1 . 4 - 2 . (-4) . 3 - 3 . 19 = 1$$
$$2 . 3^2 - 2 . (-6) . 2 - 3 . 2 . 2^2 = 18$$
$$(-4 + 2 . 1 . 3) . (3^2 + 2^2) = 26$$

Задавальняюцца.

Раўнаньне цырк. крывой можа быць напісана так:

$$(x + 2y + 2) . [(x - 3)^2 + (y - 2)^2] = O$$

альбо:

$$(x+2y+2) . [(x-3)+i(y-2)] . [(x-3)-i(y-2)]=O.$$

Умовы распадзеньня цырк. крывой на 3 простых могуць быць даны і ў форме трох дэтэрмінантаў 3-га парадку.

Сапраўды, каб даная цыркулярная крывая распадалася на 3 простых неабходна і дастаткова, каб раўнаньне акружыны, якое палучыцца пасля распадзеньня левай часткі раўнаньня крывой на два множнікі, само распалася на два множнікі.

Тры апошніх члены раўнаньня гэтай акружыны палучаем па разьдзяленьні левай часткі раўнаньня (53) на трохчлен: $ax+by+\gamma$ [Гэтае дзяленьне пры налічнасьці дзьвёх умоў (61) выпаўняецца нацэла]..

У дзелі мы палучым:

$$\frac{A-\gamma}{a} . x + \left[\frac{B}{a} - \frac{b}{a^2}\left(A-\gamma\right)\right] . y + \frac{1}{a}\left[D - \gamma\left(\frac{A-\gamma}{a}\right)\right]$$

Значыцца, раўнаньне цыркулярнай крывой пры налічнасьці ўмоў (61) распадаецца на

$$\left\{ax + by + \gamma\right\} . \left\{x^2 + y^2 + \frac{A-\gamma}{a} . x + \left[\frac{B}{a} - \frac{b}{a^2}\left\{A-\gamma\right\}\right]y + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{a}\left[D - \gamma\left(\frac{A-\gamma}{a}\right)\right]\right\} = O \quad . \ . \ . \ . \quad (71)$$

Для таго, каб цыркулярная крывая распалася на 3 простых трэба, каб выраз, які стаіць у фігурных дужках, расклаўся на два лінейных множнікі, г. з. каб дэтэрмінант 3-га парадку.

$$\begin{vmatrix} 1 & O & \frac{A-\gamma}{2a} \\ O \quad 1 & 1 & \frac{B}{2a} - \frac{b}{2a^2}(A-\gamma) \\ \frac{A-\gamma}{2a} & \frac{Ba - b(A-\gamma)}{2a^2}, & \frac{Da - \gamma(A-\gamma)}{a^2} \end{vmatrix} = O \quad . \; . \quad (72)$$

Дэтэрмінант (72) магчыма на падставе раўнаньняў (67) спросьціць: $p = \gamma = A + 2a\alpha$; $B = -2ba - 2a\beta$; $aB = -2ab\alpha - -2a^2\beta$; $A - \gamma = -2a\alpha$ $aB - b(A-\gamma) = -2ab\alpha - 2a^2 . \beta + 2ab\alpha =$

$$= -2a^2 . \beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (72a)$$

Дэтэрмінант (72) пасля спрошчэньняў пры дапамозе апошніх суадносін можа быць перапісан гэтак:

$$\begin{vmatrix} 1, & O, & -\alpha \\ O, & 1, & -\beta \\ -\alpha, & -\beta, & \frac{aD - \gamma(A-\gamma)}{a^2} \end{vmatrix} = O \quad . \; . \; . \quad (73)$$

Такім чынам, умовы распадзеньня цыркулярнай крывой 3-га пар. на тры простыя могуць быць даны ў гэткай форме:

$$\begin{vmatrix} A-\gamma, & \frac{B}{2}, & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2}, & C-\gamma, & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2}, & \frac{E}{2}, & F \end{vmatrix} = O; \quad \begin{vmatrix} A-\gamma, & \frac{B}{2}, & a \\ \frac{B}{2}, & C-\gamma, & b \\ \frac{D}{2}, & \frac{E}{2}, & \gamma \end{vmatrix} =$$

$$= O; \quad \begin{vmatrix} 1, & O, & -\alpha \\ O, & 1, & -\beta \\ -\alpha, & -\beta, & a\,D-\gamma,(A-\gamma) \end{vmatrix} = O \quad . \quad (74)$$

Прыклад. Напісаць раўнаньне цыркулярнай крывой, якая распадаецца на 3 простых. 5 коэфыентаў з васьмі зьяўляюцца адвольнымі.

Няхай $a=1$; $b=2$; $A=10$; $B=20$; $C=40$.

Далей, па вышэй даных формулах знаходзім:

$\gamma=12$; $\alpha=1$; $\beta=-7$.

Умовы (74) у даным выпадку будуць:

$$\begin{vmatrix} -2, & 5, & \frac{D}{2} \\ 5, & 28, & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2}, & \frac{E}{2}, & F \end{vmatrix} = O \quad \begin{vmatrix} -2, & 5, & 1 \\ 5, & 28, & 2 \\ \frac{D}{2}, & \frac{E}{2}, & 12 \end{vmatrix} = O; \quad \begin{vmatrix} 1, & O, & -1 \\ O, & 1, & 7 \\ -1, & 7, & D+24 \end{vmatrix} = O.$$

Апошні дэтэрмінант дае:

$$1.(D+24-49)-1.(0.7+1)=O;\ D-25-1=0;\ D=26$$

З другога дэтэрмінанту знаходзім:

$$\frac{9E}{2}=1906;\ \frac{E}{2}=134;\ E=268.$$

З першай умовы: $\frac{E^2}{2}+65.E-4732=81.F$. Адкуль

$$F=\frac{268.134+65.268-4732}{81}=\frac{48600}{81}=600.$$

Раўнаньне крывой:

$$(x+2y+12).(x^2+y^2)-2x^2+10xy+28y^2+26x+268y+600=0,$$

альбо:

$$(x+2y+12.[(x-1)^2+(y+7)^2]=O.$$

§ 11. Раўнаньне крывых пучку ў расчыненым відзе будзе гэткае:

$$[(a-\lambda a_1)x+(b-\lambda b_1)y](x^2+y^2)+(A-\lambda A_1)x^2+(B-\lambda B_1)xy+$$
$$+(C-\lambda C_1)y^2+(D-\lambda D_1)x+(E-\lambda E_1)y+F-\lambda F_1=O \quad . \quad (75)$$

Раўнаньне (75) у сувязі з інварыянтамі цыркулярных крывых [гл. IV § 4] дазваляе разьвязаць пытаньне аб ліку цыркулярных крывых паасобнага роду, якія ўваходзяць у склад пучку.

З тэй прычыны, што інварыянт паасобнага фокусу $\triangle$, вызначаецца праз дэтэрмінант 3-га парадку адносна коэфіцыента раўнаньня крывых пучку, мы палучаем раўнаньне 3 ступені адносна λ, калі прыраўняем выраз $\triangle$ да нуля.

Адсюль выходзіць, што *ва ўсялякім пучку цыркулярных крывых 3-га парадку існуюць наогул тры фокальныя крывыя, з іх адна прынамсі заўсёды сапраўдная.*

Асымптотычны інварыянт $\triangle_2$ (гл. IV, § 4) дазваляе таксама лёгка судзіць аб ліку крывых у пучку цыр. крывых, якія маюць тую ўласьцівасьць, што ўсе тры асымптоты іх злучаюцца ў адным пункце (паасобным фокусе).

З тэй прычыны, што $\triangle_2$ таксама 3 ступені адносна коэфіцыентаў раўнаньня пучку, то з раўнаньня $\triangleleft_2=O$ мы зноў палучаем тры значэньні для λ.

Гэта значыць што *цыркулярных крывых гэткага роду ў пучку будзе наогул таксама тры, з іх адна заўсёды сапраўдная.*

Таксама ступені *Арангольдавых інварыянту* S і T, і інварыянту падвойнага пункту $64S^3+T^2$ адносна λ дазваляюць лёгка разьвязаць пытаньне аб ліку крывых у пучку, уладаючых спэцыяльнымі ўласьцівасьцямі, якія вызначаюцца апошнімі інварыянтамі.

Так, напрыклад, прыраўняўшы да нуля выраз інварыянту падвоінага пункту $64.S^3+.T^2$, мы палучаем раўнаньне 12 ступені адносна парамэтру пучка λ. (S—4-й ступені адносна коэфіцыентаў раўнаньня крывой, а T—шостай ступені адносна гэтых-жа самых коэфіцыенту).

Адсюль палучаем *што ва ўсякім пучку цыркулярных 3-га парадку наогул заключаецца 12 цыркулярных крывых, маючых падвойны пункт.*

Знойдзем умовы, пры якіх у пучку будуць распадаючыя крывыя (на простую і акружыну).

Умовы распадзеньня цыркулярнай крывой, як паказана ў § 10, выражаюцца двума дэтэрмінантамі 3-га парадку. Калі мы возьмем пучок цыркулярных крывых, то кожны з коэфіцыэнтаў раўнаньня пучку будзе залежны ад парамэтру пучку λ. Урэшце мы палучым два раўнаньні, якім павінен здавальняць параметр λ для таго, каб у даным пучку маглі быць распадаючыяся крывыя.

Так як у гэтым выпадку адзін парамэтр λ павінен задавальніць дзьве ўмовы, то задача наогул немагчыма, г. з., наогул кажучы, нельга правесьці распадаючуюся цыр. крывую праз 6 пунктаў злучэньня якіх-небудзь дзьвёх цыркулярных крывых.

Угледзім, якім умовам павіны задавальняць даныя цыркулярныя крывыя для таго, каб праз пункты іх злучэньня маглі праходзіць распадаючыяся крывыя. Для гэтага паміж коэфіцыентамі раўнаньняў даных крывых павінна існаваць некаторая залежнасьць, якая палучаецца праз выключэньне парамэтру λ з дзьвёх умоў распадзеньня.

Абодва дэтэрмінанты ў агульным выпадку будуць 9 ступені адносна λ. Гэта вызначае, што ва ўсялякім пучку цыркулярных крывых 3-га парадку наогул ня можа быць больш чымся дзевяць крывых, якія распадаюцца на простую і акружыну.

Возьмем канонічнае раўнаньне цыр. крывой [гл. I, § 5, фор. 26]:

$$(x+A)\,.\,(x^2+y^2)+Dx+Ey+F=O \quad . \; . \; . \quad (76)$$

Умовы распадзеньня ў гэтым выпадку будуць:

$$E=O;\; AD=F \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (77)$$

Пучок цыркулярных крывых для ўзятай формы раўнаньня крывой напішацца гэтак:

$$(x+A)(x^2+y^2)+Dx+Ey+F+\lambda[x+A_1)(x^2+y^2)+D_1x+E_1y+$$
$$+F_1]=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (78)$$

альбо ў расчыненым выглядзе:

$$[(1+\lambda)x+A+\lambda A_1]\,.\,(x^2+y^2)+(D+\lambda D_1)x+(E+\lambda E_1)y+F+$$
$$+\lambda F=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (79)$$

Пасьля прывядзеньня раўнаньня (79) да формы (76) палучаем:

$$\left\{x+\frac{A+\lambda A_1}{1+\lambda}\right\}\cdot\left\{x^2+y^2\right\}+\frac{D+\lambda D_1}{1+\lambda}\,.\,x+\frac{E+\lambda E_1}{1+\lambda}\,.\,y+$$
$$+\frac{F+\lambda F_1}{1+\lambda} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (80)$$

Для таго, каб у пучку (80) былі распадаючыяся крывыя трэба λ выбраць так, каб

$$\frac{E+\lambda E_1}{1+\lambda}=O\;\frac{A+\lambda\,.\,A_1}{1+\lambda}\,.\,\frac{D+\lambda D_1}{1+\lambda}=\frac{F+\lambda F_1}{1+\lambda} \quad . \; . \quad (81)$$

Калі $\lambda \neq \infty$ (пры $\lambda=\infty$ умовы (81) паказваюць, што распадаецца 2-я з асноўных пучку, а пры $\lambda=O$ — распадаецца 1-я з асноўных крывых), то ўмовы (81) зводзяцца да:

$$E+\lambda E_1=O \text{ і } (A+\lambda A_1)(D+\gamma D_1)=F+\lambda F_1)(1+\lambda) \quad . \quad (82)$$

Па выключэньні λ з сыстэмы (82) мы і палучаем патрэбную залежнасьць паміж коэфыентамі асноўных крывых пучку:

$$\left\{A-\frac{EA_1}{E_1}\right\}\left\{D-\frac{ED_1}{E_1}\right\}=\left\{F-\frac{EF_1}{E_1}\right\}\cdot\left\{1-\frac{E}{E_1}\right\} \quad . \; . \quad (83)$$

Яна можа быць перапісана ў відзе сумы здабыткаў двох дэтэрмінантаў другога парадку:

$$\begin{vmatrix} A, & A_1 \\ E & E_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} D, & D_1 \\ E, & E_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F, & F_1 \\ E & E_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ E & E_1 \end{vmatrix} = O \,. \quad (84)$$

Апошнія радкі ў усіх дэтэрмінантаў—аднолькавыя—коэф. пры у у раўнаньні асноўных крывых пучку, першыя радкі складаюцца з астатніх коэфіцыентаў гэтых крывых па парадку альфабэту.

Умовы (82) па расчыненьні дужак у другой з іх могуць быць перапісаны гэтак:

$$\lambda^2(A_1 . D_1 - F_1) + \lambda . (A_1 . D + AD_1 - F - F_1) + AD - F = O$$
$$E + \lambda E_1 = O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (85)$$

Колькімі значэньнямі λ здавальняецца сыстэма (85)?

Калі раўнаньні (85) не тожсамасьці, то можа існаваць толькі адно значэньне λ, здавальняючае абодва раўнаньні сыстэмы (85).

$\lambda = \infty$, калі $E_1 = O$ і $A_1 . D_1 - F = O$. Геомэтрычны сэнс гэтага ўказан вышэй.

$\lambda = O$, калі $E = O$ и $AD - F = O$. Геомэтрычны сэнс гэтага—зразумелы.

Разгледзім, пры якіх умовах сыстэма (85) задавальняецца незалежна ад λ. Для гэтага неабходна і дастаткова, каб:

1) $E = O$; 2) $E_1 = O$; 3) $A_1D_1 - F_1 = O$; 4) $AD - F = O$; 5) $A_1D + AD_1 - F - F_1 = O$ . . . . (86)

Пры гэтых умовах абодва раўнаньні (85) зьвяртаюцца ў тожсамасьці, і ў пучку будуць толькі распадаючыяся крывыя.

Умовы 1—4 паказваюць, што асноўныя крывыя пучку ў гэтым выпадку распадаюцца, што само-сабой зразумела.

Пятая ўмова пры дапамозе (3) і (4) можа быць напісана так:

$$(A_1 - A) . (D - D_1) = O \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (87)$$

З (87) заключаем, што альбо:

$$A_1 = A$$

Тады: $\frac{D}{D_1} = \frac{F}{F_1} = \frac{1}{k}$, где к—некаторая сталая.

Асноўныя крывыя пучку ў гэтым выпадку будуць:

$$(x+A)(x^2+y^2)+Dx+AD=O \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$
$$(x+A)(x^2+y^2)+k\,.\,Dx+kAD=O$$

альбо:

$$(x+A)\,.\,(x^2+y^2+D)=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$
$$(x+A)\,.\,(x^2+y^2+kD)=O$$

Абедзьве асноўныя крывыя маюць супольную сапраўдную асымптоту.

Акружыні, на якія яны распадаюцца (калі яны сапраўдныя)—концэнтрычныя (абедзьве праходзіць праз пачатак каардынат).

Калі $D=D_1$, то $\frac{A_1}{A}=\frac{F_1}{F}$

і ня цяжка прыйсьці да заключэньня, што сапраўдныя асымптоты крывых у гэтым выпадку паралельны.

Абедзьве акружыны абедзьвюх асноўных крывых супадаюць.

Раўнаньні пучку (80) пры $A=A_1$ палучае выгляд:

$$(x+A)\,.\,(x^2+y^2)+\frac{1+k\lambda}{1+\lambda}\,.\,Dx+\frac{1+k\lambda}{1+\lambda}\,.\,AD=O \quad . \quad (90)$$

Зразумела, што тут выпаўняюцца абедзьве ўмовы распадзеньня (77) незалежна ад λ.

Раўнаньне пучку пры $D=D_1$

будзе мець гэткую форму:

$$\left[x+\frac{A+\lambda A_1}{1+\lambda}\right](x^2+y^2+D)=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

Разуважым нарэшце выпадак, калі $\lambda=-1$.

Калі $\lambda=-1$, то пучок цыркулярных крывых пераходзе у пучок акружын. Сапраўдная асымптота ёсьць у даным выпадку бяскрайна далёкая простая.

Гэты выпадак (адпавядаючы радыкальнай восі ў пучку акружын) магчыма разглядзець як адзін з часных выпадкаў апошняй формы пучку (калі ўсе крывыя складаюцца з адней акружыні і раду паралельных простых—іх сапраўдных асымптот.

§ 12. Пакажам, якім чынам зьмяняецца палажэньне пасобнага фокусу кожнай з цыркулярных крывых пучку пры зьмяненьні парамэтру пучку λ.

Пакажам, што *геомэтрычным месцам фокальных цэнтраў (паасобных фокусаў) пучку цыркулярных крывых 3-га парадку будзе некаторая акружына.*

Знойдзем яе раўнаньне.

Коордынаты паасобнага фокусу цырк. крывой, як вядома (гл. I, § 3 формула 14) здавальняюць наступную сыстэму раўнаньняў).

$$\begin{aligned} 2a\,.\,X - 2b\,.\,У + A - C = O \\ 2b\,.\,X + 2aУ + B = O \end{aligned} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (92)$$

где X і У коордынаты паасобнага фокусу крывой.

Падставім у раўнаньні (92) выразы коэфыэнтаў з раўнаньня (75) пучку цыркулярных крывых, тады палучым:

$$\begin{aligned} 2(a-\lambda a_1)\,.\,X - 2(b-\lambda b_1)\,.\,У + A - \lambda\,.\,A_1 - C + \lambda C_1 = O \\ 2(b-\lambda b_1)\,.\,X + 2\,.\,(a-\lambda a_1)\,.\,У + B - \lambda B_1 = O \end{aligned} \quad . \; . \; (93)$$

Знайшоўшы λ з першага і другога раўнаўньняў сыстэмы (93), палучым:

$$\lambda = \frac{2aX - 2bУ + M}{2a_1X - 2b_1У + M_1};\ \lambda = \frac{2bX + 2aУ + B}{2b_1X + 2a_1У\,. + B_1} \quad . \; (94$$

$$\text{где } M = A - C,\ M_1 = A_1 - C_1$$

Выключыўшы λ з раўнаньняў (94), мы і палучым раўнаньне шуканага геомэтрычнага месца:

$$\frac{2a\,.\,X - 2b\,.\,У + M}{2a_1X - 2b_1У + M_1} = \frac{2b\,.\,X + 2a\,.\,У + B}{2b_1\,.\,X + 2a_1\,.\,У + E_1}$$

альбо:

$$\begin{aligned} (2aX - 2bУ + M)\,.\,(2b_1X + 2a_1У + B_1) = (2a_1X - 2b_1\,.\,У + M_1)\,. \\ .\,(2b\,.\,X + 2aУ + B) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (96) \end{aligned}$$

Раскрыем дужкі:

$$\begin{aligned} 4ab_1X^2 - 4bb_1\,.\,XУ + 2b_1MX + 4aa_1XУ\,. - 4a_1bУ^2 + 2a_1M\,.\,У + \\ + 2aB_1\,.\,X - 2bB_1У + MB_1 = 4a_1b\,.\,X^2 - 4bb_1\,.\,X\,.\,У + 2bM_1X + \\ + 4aa_1X\,.\,У - 4ab_1У^2 + 2aM_1У + 2a_1BX - 2b_1BУ + BM_1 \end{aligned}$$

Па прывядзеньні падобных членаў і пераносе ўсіх членаў у першаю частку палучым:

$$\begin{aligned} 4(ab_1 - a_1b)\,.\,X^2 + 4(ab_1 - a_1b)\,.\,У^2 + 2(Mb_1 - M_1b + aB_1 - a_1B)\,.\,X + \\ + 2(Ma_1 - M_1a + Bb_1 - B_1b)\,.\,У + B_1M - BM_1 = O \quad . \; . \; (97) \end{aligned}$$

Раўнаньне (97) магчыма перапісаць з коэфіцыентамі ў форме дэтэрмінантаў:

$$2\begin{vmatrix} a, & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix} . X^2 + 2 \begin{vmatrix} a, & a_1 \\ b, & b_1\end{vmatrix} . У^2 + \left\{ \begin{vmatrix} M & M_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a, & a_1 \\ B & B_1\end{vmatrix}\right\} . X +$$

$$+ \left\{ \begin{vmatrix} M, & M_1 \\ a, & a_1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & b_1 \\ B & B_1\end{vmatrix}\right\} . У + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} M & M_1 \\ B & B_1\end{vmatrix} = O \quad . \quad (98)$$

Раўнаньне (98) і будзе раўнаньнем шуканай акружыны.

На гэтай акружыне знаходзяцца і паасобныя фокусы F_1 і F_2 асноўных крывых пучка.

Акружына (98) ёсьць геомэтрычнае месца пунктаў злучэньня адпаведных лучоў двох проектыўных пучкоў, якія вызначаюцца раўнаньнямі (94) гэтага §.

Кожных два адпаведных лучы гэтых пучкоў узаемна пэрпэндыкулярны, што лёгка ўбачыць з раўнаньняў (93).

$$(a - \lambda a_1)(b - \lambda b_1) - (b - \lambda b_1) . (a - \lambda a_1) = O \quad . \quad . \quad (99)$$

Незалежна ад λ.

Цэнтры гэтых пучкоў наогул не супадаюць з паасобнымі фокусамі F_1 і F_2 асноўных крывых пучка.

Для іх супадзеньня патрэбны некаторыя ўмовы.

Паасобны фокус F_1 першай з асноўных крывых знойдзецца з сыстэмы:

$$\begin{aligned} 2a . X - 2bУ + M &= O \\ 2b . X + 2aУ + B &= O \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

Коордынаты F_2 палучым з сыстэмы:

$$\begin{aligned} 2a_1X - 2b_1У + M_1 &= O \\ 2b_1X + 2a_1У + B_1 &= O \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

Коордынаты цэнтру 1-га з проектыўных пучкоў (93) знойдзем з раўнаньняў:

$$\begin{aligned} 2aX - 2bУ + M &= O \\ 2a_1X - 2b_1У + M_1 &= O \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

А коордынаты цэнтру другога з проектыўных пучкоў знойдуцца з сыстэмы:

$$\begin{aligned} 2bX + 2aУ + B &= O \\ 2b_1X + 2a_1У + B_1 &= O \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

Для таго, каб сыстэмы (100) і (102) былі эквівалетны неабходна і дастаткова, каб дэтэрмінант:

$$\begin{vmatrix} 2a, & -2b, & M \\ 2b & 2a, & B \\ 2a_1 & -2b_1 & M_1 \end{vmatrix} = O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

Аналёгічна, умовай супадзеньня пунктаў F_2 і цэнтру 2-га з проектыўных пучкоў будзе:

$$\begin{vmatrix} 2b_1 & 2a_1 & B_1 \\ 2a_1, & -2b_1 & M_1 \\ 2b & 2a & B \end{vmatrix} = O \quad . \; . \; . \; . \quad (105)$$

Дэтэрмінанты (104) і (105) могуць быць перапісаны прасьцей:

$$\begin{vmatrix} a, & -b, & M \\ b, & a, & B \\ a_1 & -b_1, & M_1 \end{vmatrix} = O \text{ i } \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & B_1 \\ a_1 & -b_1 & M_1 \\ b & a & B \end{vmatrix} = O \; . \quad (106)$$

Абедзьве ўмовы (106) будуць задавольнены, калі:

1) $\frac{b}{a_1} = \frac{a}{b_1} = \frac{B}{M_1}$; роўнасьць двох першых стасункаў паказвае, што сапраўдныя асымптоты асноўных крывых узаемна пэрпэндыкулярны.

2) Умовы (106) будуць выпоўнены, калі, напр., $M = O$; $M_1 = O$ $B = O$ і $B_1 = O$.

У гэтым выпадку, як лёгка праверыць па формулах (61) гэтай главы, абедзьве асноўныя крывыя распадаюцца на простыя і акружыны, прычым пункты F_1 і F_2 (см. рысунак 57) супадаюць з цэнтрамі апошніх.

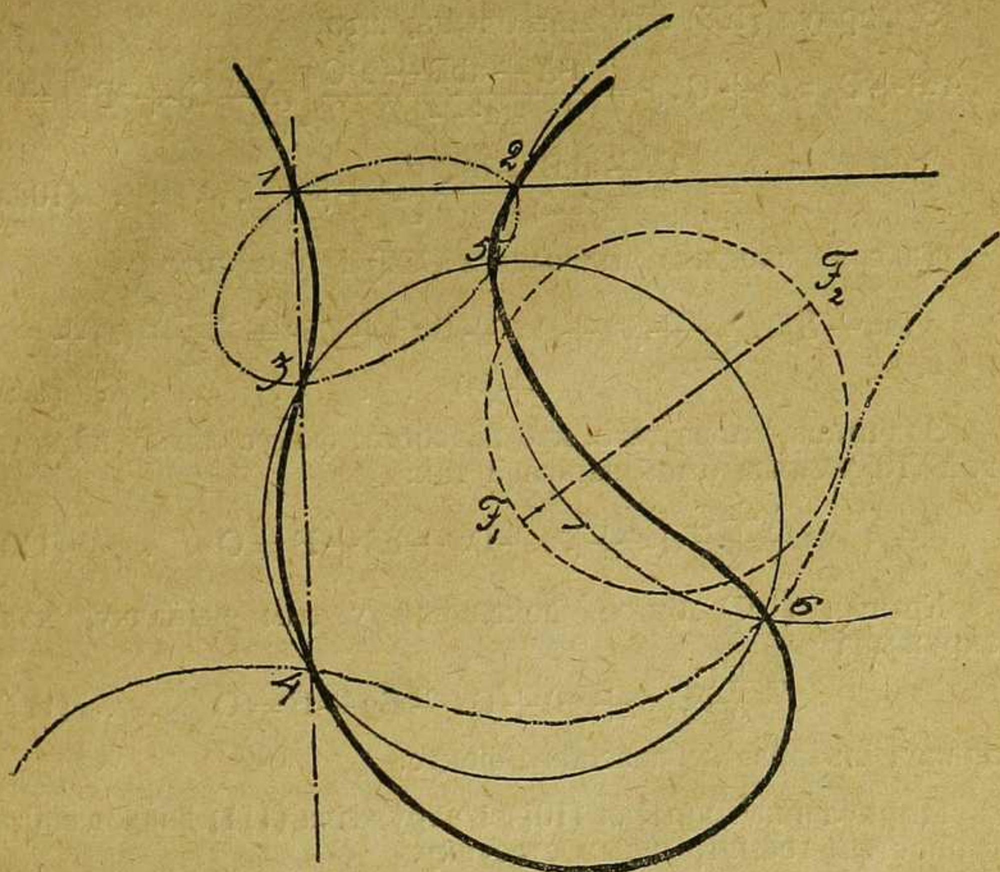
Мы не разважаем выпадку, калі $a = b = B = O$ альбо $a_1 = b_1 = B_1 = O$ альбо $a = b = a_1 = b_1 = O$, бо тады адна, альбо абедзьве асноўных крывых пучка пераходзіць у конічнае сячэньне, і коордынаты аднаго альбо абодвых фокусаў становяцца неазначанымі.

На рысунку (57) дзьве распадаючыяся цырк. крывыя маюць узаемна пэрпэндыкулярныя сапраўдныя асымптоты. Адна з крывых накрэсьлена сплашной лініяй, другая пунктырам. Цыфрамі 1—6 адмечаны цэнтры пучка крывых F_1 і F_2 паасобныя фокусы асноўных крывых пучка.

Гэтыя пункты супадаюць з цэнтрамі акружын, уваходзючых у склад распадаючыхся крывых. Пунктырам нарысавана акружына фокальных цэнтраў пучка.

Пункты F_1 і F_2 ляжаць на канцох яе дыямэтру.

Сплашною тоўстаю лініяй і пунктырам з дзьвюма кропкамі нарысаваны дзьве крывыя пучка: аднагалінная і дзьвюхгалінная.



Рыс. 57.

§ 13. У § 5 главы IV была палучана ўмова, каб цыркулярная крывая была так званай фокальнай крывой, г. зн. каб яе паасобны фокус ляжаў на самой крывой. Апошняя ўмова можа быць вызначана інакш, і ў гэткай форме ёй можа быць дана геомэтрычная інтэрпрэтацыя. Яна належыць да Müller'а і знаходзіцца ў яго артыкуле: „Construction der Fokalcurve aus sechs gegebenen Puncten". Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 40. S. 337.

Калі цырк. крывая

$$(ax+by)\cdot(x^2+y^2)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad . \quad (107)$$

будзе фокальнай, то коордынаты яе цэнтру:

$$\alpha=-\frac{a(A-C)+bB}{2(a^2+b^2)};\ \beta=-\frac{b(C-A)+aB}{2(a^2+b^2)} \quad . \quad (108)$$

павінны задавольніць раўнаньне (107).

З формул (108) лёгка вылічыць, што

$$A\alpha^2 + B.\alpha.\beta + C.\beta^2 = \frac{a^2A + abB + b^2C}{4(a^2+b^2)}\left[(A-C) + {}^2B^2\right] =$$

$$= \frac{a^2A + abB + b^2C}{a^2+b^2}\left[\alpha^2+\beta^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108a)$$

Таксама няцяжка вылічыць з (108) і 108а, што

$$(a\alpha + b\beta).(\alpha\beta^2 + \beta^2) + A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 = \frac{A+C}{2}(\alpha^2 +$$

$$+ \beta^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

Значыцца, умова таго, каб паасобны фокус ляжаў на крывой (107), можа быць напісана так:

$$\frac{A+C}{2}.(\alpha^2+\beta^2) + D\alpha + E\beta + F = O \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

Крывая (107) будзе фокальнай у тым выпадку, калі акружына

$$\frac{A+C}{2}.(x^2+y^2) + Dx + Ey + F = O \quad . \quad . \quad (111)$$

праходзіць праз яе паасобны фокус.

Цыркулярная крывая (107) і акружына (111) знаходзяцца ў простым геомэтрычным стасунку.

Абазначыўшы для скарачэньня левую частку раўнаньня (107) літараю С, а левую частку раўнаньня (111) літараю К, складзем розьніцу

$$C - K = (ax+by).(x^2+y^2) + Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F -$$

$$- \frac{A+C}{2}.(x^2+y^2) - Dx - Ey - F$$

Прыраўняўшы гэтую розьніцу (пасьля некаторых спрашчэньняў) да нуля, палучаем раўнаньне:

$$C - K = (ax+by).(x^2+y^2) + \frac{A-C}{2}.x^2 + Bxy + \frac{C-A}{2}y^2 = O \quad . \quad (112)$$

Раўнаньне (112) вызначае цыркулярную крывую 3-га пар. з падвойным пунктам у пачатку координат. Яе сапраўдная асымптота паралельна сапраўднай асымптоце крывой С.

Лёгка разуважыць таксама, што цэнтр крывой (112) супадае з цэнтрам крывой С.

Крывая (112) будзе таксама фокальнай з тэй прычыны, што для яе здавальняецца ўмова (110).

Крывыя (107) і (112) злучаюцца ў двох бяскрайна далёкіх пунктах і ў чатырох канцовых пунктах, якія ляжаць на акружыне (111).

Калі з раўнаньняў C=O і C-K=O складзем раўнаньне: C—(C—K)=O, то палучым раўнаньне крывой, якая пройдзе праз пункты злучэньня крывых: C=O і C—K=O. Але, урэшце, мы палучаем раўнаньне акружыны K=O (111). Гэтым даводзіцца другая частка апошняй тэорэмы. Паралельнасьць сапраўдных асымптот абедзьвюх крывых пацьвярджае першую яе частку.

Такім чынам, для кожнага пункту роўніцы M магчыма пабудаваць крывую (112), якая будзе мець у гэтым пункце свой падвойны пункт, будзе мець супольны цэнтр (паасобны фокус) з данай крывой C і супольны бяскрайна далёкі пункт. Сапраўды, указаныя ўмовы зводзяцца, як няцяжка заўважыць, да 3+5+1 умовам, а праз 9 умоў крывая 3-га парадку адназначна азначаецца.

З гэтай прычыны кожнаму пункту роўніцы M у адносінах да данай цыркулярнай крывой C адпавядае азначаная акружына K, на якой знаходзяцца чатыры канечныя пункты злучэньня крывых (107) і (112).

Гэтая акружына K тады і толькі тады пройдзе праз цэнтр крывой C, калі апошняя крывая—фокальная.

Назавем азначаную гэткім чынам акружыну K—адпаведнай пункту M адносна крывой C.

Калі пункт M ляжыць на крывой C, то яго трэба лічыць за два супадаючыя пункты злучэньня крывых: C — O і C—K=O. Адпаведная акружына K у гэтым выпадку датыкаецца да крывой C.

Для таго, каб паказаць, якім чынам у гэтым выпадку будуецца акружына K, возьмем пункт M за пачатак координат і правядзем вось y паралельна сапраўднай асымптоце крывой C.

Крывая C будзе мець сваім раўнаньнем:

$$x(x^2+y^2)+A_1x^2+B_1xy^2+C_1y^2+\text{Д}_1x+E_1y=O \quad . \quad . \ (113)$$

Раўнаньне яе сапраўднай асымптоты U будзе:

$$x+C_1=O \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (114)$$

Раўнаньне акружыны K будзе:

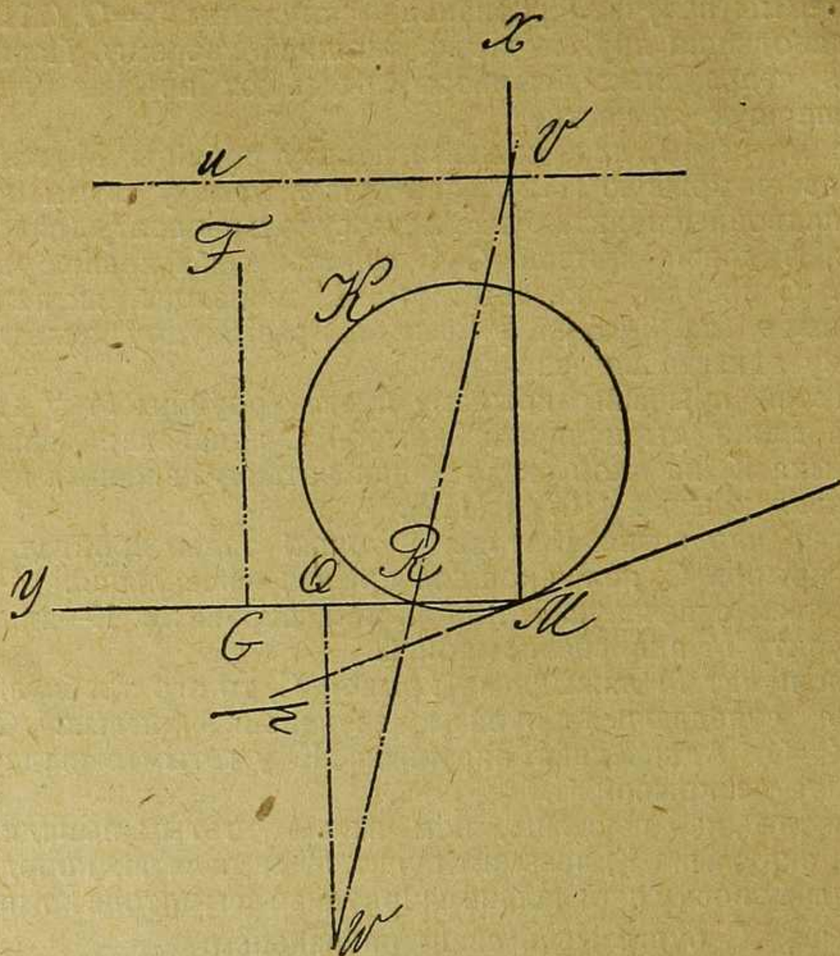
$$\frac{C_1+A_1}{2}(x^2+y^2)+\text{Д}_1x+E_1y=O \quad . \ . \ . \ . \ (115)$$

Няхай Q і R будуць пункты злучэньня восі OY з крывымі C і K.

V—пункт злучэньня сапраўднай асымптоты крывой—U з восьсю X.

З рысунку (58) знаходзім:

$$MQ=-\frac{E_1}{C_1};\ MR=-\frac{2E_1}{A_1+C_1};\ MV=-C_1\ \ .\ \ .\ \ .\ (116)$$



Рыс. 58.

Адсюль палучым:

$$QR=QM-RM=-\frac{E_1}{C_1}+\frac{2E_1}{A_1+C_1}=\frac{2E_1\,.\,C_1-A_1\,.\,E_1-E_1\,.\,C_1}{C_1(A_1+C_1)}\ .\ (117)$$

Злучыўшы падобныя члены і расклаўшы на множнікі, палучым:

$$QR=\frac{E_1\,.\,C_1-A_1\,.\,E_1}{C_1(A_1+C_1)}=\frac{E_1\,.\,(C_1-A_1\,.)}{C_1(C_1+A_1)}\ \ .\ \ .\ \ .\ (118)$$

З (116) і (118) знойдзем:

$$\frac{MR}{QR} = -\frac{2.E_1.C_1}{E_1.(C_1-A_1)} = -\frac{2C_1}{C_1-A_1} = \frac{2MV}{2\alpha} \quad . \; . \; . \; (119)$$

Праз α абазначана абсцыса паасобнага фокусу F крывой

(113) $[a=1;\ b=0;\ \alpha=\frac{C_1-A_1}{2}]$.

З падобнасьці трыкутнікаў: VMR і QRW знойдзем, што

$$\frac{QW}{MV} = \frac{QR}{MR}, \text{ альбо на падставе} \quad . \; . \; . \; . \; (119)$$

$$\frac{QW}{MV} = \frac{\alpha}{MV} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (120)$$

Адкуль

$$QW=\alpha \text{ г. зн. роўна } FG \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (121)$$

Адсюль і вынікае спосаб пабудаваньня акружыны K, адпаведнай данай цыркулярнай крывой C.

Гэтая крывая можа быць задана адназначна, напрыклад, па яе цэнтру F, сапраўднай асымптоце U, пункту M, пункту Q і датычнай p у пункце M.

Для пабудаваньня з пункту M апускаем пэрпэндыкуляр на U, у злучэньні яго з U маем пункт V. З пункту F апускаем пэрпэндыкуляр FG на MQ. З пункту Q узводзім да MQ пэрпэндыкуляр і адкладаем на ім QW, роўнае FG.

Пункт W злучаем простай з V. Пункт R злучэньня простых VW і MQ і будзе тым пунктам, праз які павінна прайсьці акружына K.

Апроч таго, дана датычная да акружыны K у пункце M.

Маем, такім чынам, дастатковы лік даных для пабудаваньня гэтай акружыны.

Узяўшы дзьве цыркулярныя крывыя: $C=O$ і $C_1=O$ і пункт M, знойдзем адпаведныя акружыны $K=O$ і $K_1=O$ для гэтага пункту адносна: $C=O$ і $C_1=O$ . . . . . . (122)

Акружынай, адпаведнай пункту M адносна крывой:

$$C-\lambda C_1=O$$

будзе відавочна $K-\lambda K_1=O$ . . . . . (123)

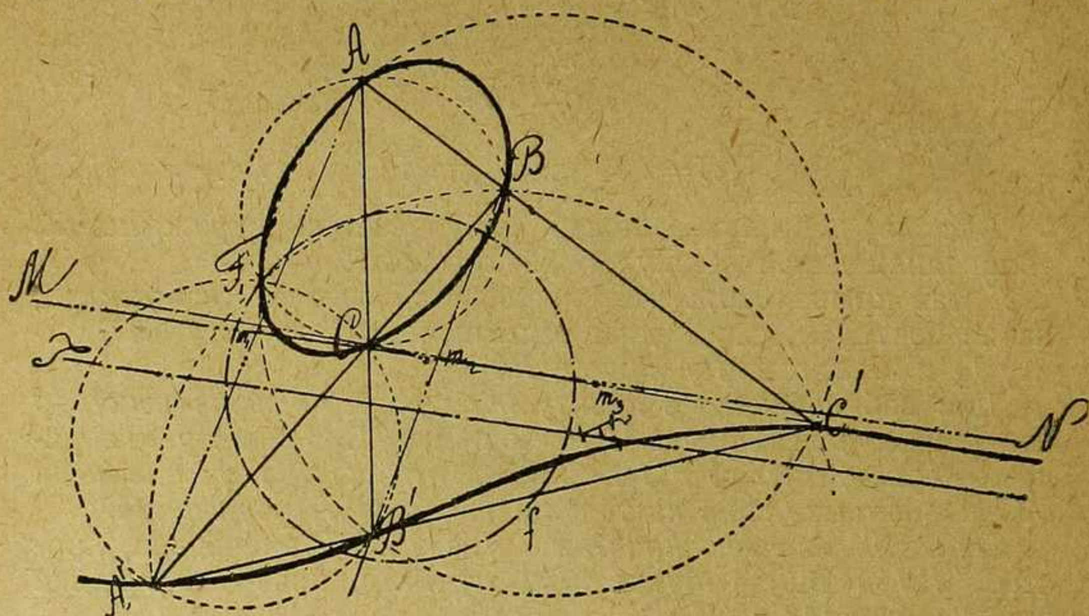
Адсюль маем наступную тэорэму (Müller):

Акружыны, адпаведныя якаму-неб. пункту адносна пучка цыркулярных крывых 3-га парадку, самі ўтвараюць пучок з тым-жа самым парамэтрам.

§ 14. Калі A, A^1; B, B^1; і C, C^1 тры пары процілеглых кутоў поўнага чатырохкутніка (рыс. 59) і калі мы пабудуем чатыры акружыны, апісаныя навакол трохкутнікаў: ABC, A^1B^1C, A^1BC^1 і AB^1C^1, утвораных бакамі чатырохкутніка, то ўсе гэтыя 4 акружыны злучаюцца, як вядома, у адным пункце F_1—фокусе, упісанай у даны чатырохкутнік параболы.

[Lambert Jnsigniores orbitae cometarum proprietates. Ausburg 1761; Salmon—Fiedler Bd. I § 212].

Далей Durège паказаў, што фокусы ўсіхконічных сячэньняў, упісаных у даны чатырохбочнік, утвараюць фо-



Рыс. 59.

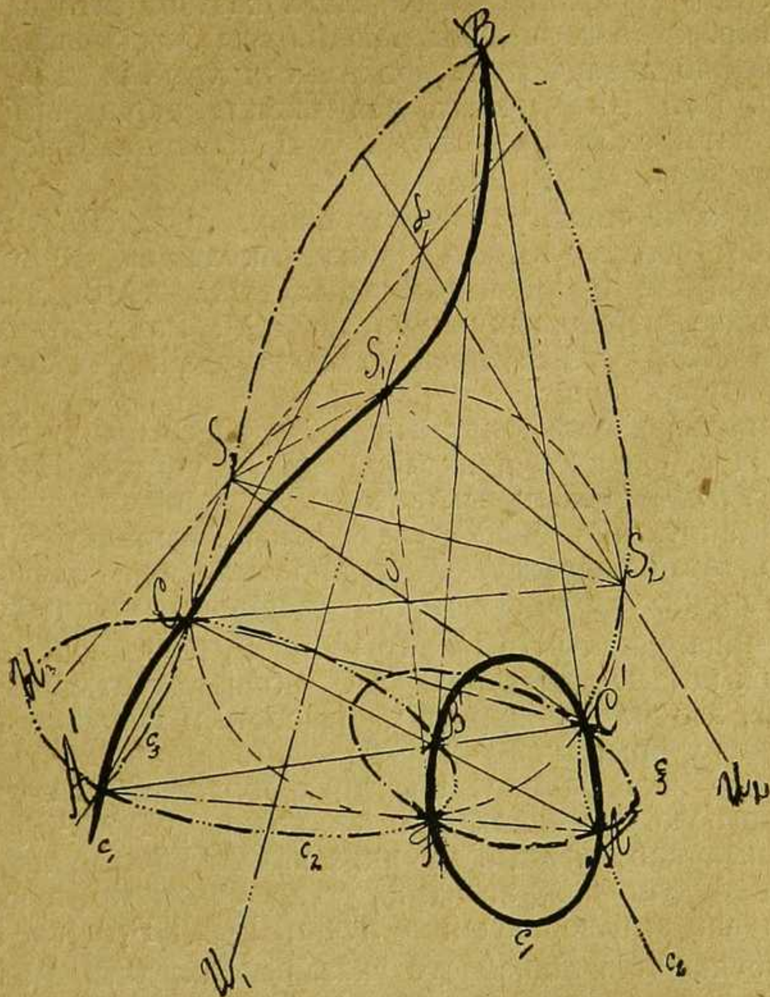
кальную цыркулярную крывую 3-га пар., якая праходзіць праз вяршыні ўсіх 6 кутоў данага чатырохбочніка.

Пункт F_1 будзе яе паасобным фокусам (фокальным цэнтрам), а яе сярэдняя лінія [гл. I, § 5, стар. 9] праходзіць праз сярэдзіны ўсіх трох дыягоналяй AA^1, BB і CC^1 чатырохбочніка. [Durège, Math. Annalen 5, S. 90].

Кожны з бакоў чатырохбочніка сумесна з акружынай, якая праходзіць праз вяршыні ◁-ка, утворанага трыма астатнімі бакамі, магчыма лічыць за распадаючуюся цыркулярную крывую, пучка цыркулярных крывых, прычым цэнтрамі гэтага пучка будуць 6 вяршынь поўнага чатырохбочніка. [У гэтым пучку будуць чатыры распадаючыяся крывыя]. На падставе § 11 усе паасобныя фокусы крывых

пучка павінны ляжаць на акружыне, значыцца, усе чатыры цэнтры памянёных вышэй чатырох акружын павінны знаходзіцца на акружыне f, якая праходзіць таксама і праз пункт F_1.

Акружына f нарысавана на рысунку 59 пунктырам з аднэй кропкай. m_1 m_2 m_3—сярэдзіны дыягоналяй чатырохбочніка, MN—мэдыяна крывой Durège'a (яна нарысавана сплашною тоўстаю лініяй).



Рыс. 60.

UL—яе сапраўдная асымптота. A_2—яе галоўны пункт.

Праз пункт F_1, як відна з рысунку, праходзяць пяць цыркулярных крывых пучка, гэта вызначае, што ён ёсьць

дзевяты цэнтр пучка крывых 3-га парадку. [гл. I § 8], і праз яго, такім чынам, праходзяць усе крывыя пучка.

Урэшце маем наступную тэорэму:

Усе цыркулярныя крывыя 3-га парадку, якія праходзяць праз 6 вяршынь поўнага 4-х бочніка, праходзяць таксама і праз фокус упісанай у гэты 4-х бочнік параболы [Müller].

§ 15. У § 10 гэтай главы была паказана, што ва ўсякім пучку цыр. крывых заўсёды маюцца тры фокальныя крывыя.

Лёгка пабудаваць гэтыя фокальныя крывыя для часнага выпадку, калі цэнтры пучка зьяўляюцца вяршынямі такога поўнага чатырохбочніка, якога бакі папарна ўзаемна пэрпэндыкулярны.

Няхай бакі поўнага чатырохбочніка (рыс. 60) A^1B і AB^1; A^1C і AC^1 будуць узаемна пэрпэндыкулярны. B^1 у гэтым выпадку будзе ортоцэнтрам трыкутніка AA^1B. Значыцца, і BB^1 будзе пэрпэндыкулярна да AA^1. Радыкальная вось акружын ACB і AC^1B^1 пройдзе праз адзін з іх супольных пунктаў і праз пункт A.

Радыкальная вось акружын ACB і A^1C^1B пройдзе праз адзін з іх супольных пунктаў і праз пункт B. Пункт злучэньня гэтых радыкальных восяй (F_1) павінен ляжаць таксама на акружыне ACB. Але ў даным выпадку AB ёсьць дыямэтр гэтай акружыны, і зн. простыя, якія злучаюць яе адвольны пункт з пунктамі A і B—узаемна пэрпэндыкулярны.

Значыцца, у даным выпадку пункт F_1 злучэньня 4-х акружын ляжыць на дыягоналі AA^1 поўнага чатырохбочніка. Ён будзе, згодна з папярэднім, паасобным фокусам першай з фокальных крывых пучка c_1.

З лучоў, якая проходзіць праз пункт F_1 два сустракаюць крывую c_1 у двох пунктах кожны [у A і A^1 і ў B і B^1]. Акружыны, пабудаваныя на адрэзках AA^1 і BB^1, як на дыямэтрах, будуць акружынамі, утвараючымі крывую c_1 па проектыўнай адпаведнасьці з лучамі F_1A і F_1B [гл. I § 16].

З рысунку (60) відна, што ўказаныя акружыны злучацца ў C і C^1. Такім чынам, пункты C і C^1 зьяўляюцца цэнтрамі пучка акружын, проектыўнага да пучка лучоў з цэнтрам у пункце F^1.

Крывая c_1 будуецца звычайным спосабам. На рысунку (60) крывая c_1 нарысавана сплашной лініяй. Яна складаецца з дзьвюх галін. Акружыне CC^1F_1 адпавядае [§ 16 гл. I] дыямэтр яе F_1S_1, які датычыцца да крывой c_1 у пункце F_1 і злучаецца з крывой у пункце S^1—галоўным пункце крывой c_1.

Праз пункт S_1 пройдзе сапраўдная асымптота крывой c_1—S_1U_1 (пэрпэндыкулярна да лініі CC^1). Пункты F_1 і S_1 знаходзяцца на аднолькавай адлегласьці [§ 17 гл. I] ад сярэдняй лініі крывой c_1. Гэта сярэдняя лінія пройдзе, такім чынам, праз цэнтр O акружыны CC^1F_1.

Аналёгічна, дзьве акружыны, якія маюць дыямэтрамі AB^1 і A^1B, злучацца ў пунктах C^1 і F_1.

Значыцца, пункт C ёсьць паасобны фокус другой фокальнай пучка: c_2, прычым пункты C^1 і F_1 будуць цэнтрамі пучка акружын, якія яе ўтвараюць. Крывая c_2 нарысавана пунктырам з трыма кропкамі. Яна таксама складаецца з овалу і незамкнутай галіны. Дыямэтр CS_2 дае магчымасьць знайсьці яе галоўны пункт S_2. Згодна з папярэднім пабудавана яе сапраўдная асымптота S_2U_2.

Зусім таксама знойдзем, што апошняя з фокальных крывых пучка: c_3 можа быць пабудавана па яе паасобнаму фокусу C^1 і цэнтрам пучка акружыны C і F_1. S_3—яе галоўны пункт.

S_3U_3—яе сапраўдная асымптота. Памянёная вышэй акружына CC^1F ёсьць нішто другое як акружына фокальных цэнтраў пучка f. Трэцяя фокальная крывая c_3 нарысавана пунктырам з аднэй кропкай. У сувязі з вышэйсказаным ня цяжка заўважыць, што сярэднія лініі ўсіх трох фокальных крывых пучка злучаюцца ў адным пункце O—цэнтры фокальнай акружыны.

Далей з рысунку (60) магчыма ўгледзіць, што бакі трыкутніка $S_1S_2S_3$ адпаведна паралельны лініям, злучаючым цэнтры пучкоў акружын, якія ўтвараюць кожную з трох фокальных крывых пучка.

Значыцца, *сапраўдныя асымптоты трох фокальных крывых пучка зьяўляюцца вышынямі трыкутніка:* $S_1S_2S_3$ *і праходзяць, такім чынам, праз адзін пункт: L—яго ортоцэнтр.*

§ 16. У § 10 главы III была даведзена тэорэма Salmon'а аб інварыянтнасьці ангармонічнага стасунку пучка чатырох датычных, праведзеных з якога-неб. пункту цыркулярнай крывой 3-га парадку да гэтай крывой.

Канчаючы главу аб мэтрычных уласьцівасьцях цыркулярных крывых, пакажам, якая мэтрычная ўласьцівасьць гэтых крывых вызначаецца інварыянтнасьцю гэтага стасунку ў выпадку фокальных крывых.

Ітак, возьмем дзьвюхгалінную фокальную крывую з гіпэрболічным пучком утвараючых акружын: толькі да такіх

крывых магчыма правесьці 4 розных датычных з пункту, узятага на крывой (рыс. 11 стар. 27 частка I).

C—паасобны фокус крывой. E і D—цэнтры гіпэрболічнага пучка акружын (літара E прапушчана на рысунку). Сапраўдная асымптота крывой праходзіць праз галоўны пункт A_2 і пэрпэндыкулярна да простай ED.

Галоўны пункт крывой ляжыць на акружыне, якая праходзіць праз пункты: C, E і D. [гл. I. § 17].

Калі разважаць крывую, як утвораную пучком лучоў з цэнтрам у C і проектыўным да яго пучком акружын з цэнтрамі ў E і D, то лучу CE адпавядае тая акружына пучку, якой цэнтр ляжыць на CE і якая датычна да крывой у пункце E. Значыцца, лінія A_2E—датычная да цыркулярнай крывой у пункце E (да бесканечнай яе галіны).

Тое-ж самае трэба сказаць і адносна пункту D. Простая A_2D—датычная да цыркулярнай крывой у пункце D (да овалу).

Простая A_2C, як вядома, трэцяя датычная да цыркулярнай крывой з пункту A_2. Наканец, у якасьці чацьвертай датычнай да цырк. крывой з пункту A_2 магчыма ўзяць яе сапраўдную асымптоту (датычную ў бесканечна-далёкім пункце).

Такім чынам, мы маем пучок чатырох датычных да данай крывой з яе пункту A_2. Дапасуем да няго тэорэму *Salmon'a*.

На падставе яе:

$A_2(E_1CDE) = \text{constans}$ для ўсіх пунктаў цыркулярнай крывой.

Раскрыўшы сымболічны выраз ангармонічнага стасунку, мы палучым

$$A_2(E_1CDE) = \frac{\text{sn } E_1A_2D}{\text{sn } CA_2D} : \frac{\text{sn } E_1A_2E}{\text{sn } CA_2E} = \text{constans} \quad . \quad . \quad (124)$$

альбо

$$\frac{\sin E_1A_2D \cdot \sin CA_2E}{\text{sn } CA_2D \cdot \text{sn } E_1A_2E} = \text{constans} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (125)$$

Але кут $E_1A_2D +$ кут $CA_2E = 180^0$, бо $\angle E_1A_2D + \angle CA_2E = \angle E_1A_2C + \angle CA_2D + \angle CA_2E = 90^0 + \angle CA_2E + \angle EA_2D = 90^0 + 90^0 = 180^0$.

Куты CA_2D і EA_2D сапраўды роўныя адзін другому з тэй прычыны, што яны маюць роўныя меры:

$$\frac{1}{2} \frown CD \text{ і } \frac{1}{2} \frown A_2E.$$

Значыцца sin E_1A_2D=sin CA_2E. Адразу відна, што і

$$\angle CA_2D + \angle E_1A_2E = 180^0$$

і зн. sin CA_2D=sn E_1A_2E.

Урэшце можам напісаць, што $A_2(E_1CDE)$=

$$= \left[\frac{\sin E_1A_2D}{\operatorname{sn} CA_2D}\right]^2 = \text{constans} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (126)$$

Але з ◁=каў A_2CE і A_2CD (абодва простакутныя) лёгка палучаем, што

$$\sin E_1A_2D = \operatorname{sn} CA_2E = \frac{CE}{2R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (127)$$

а $\sin CA_2D = \frac{CD}{2R}$, где R—радыус акружыны A_2EDC.

Урэшце палучаем наступнае:

$$A_2(E_1CDE) = \left[\frac{CE}{CD}\right]^2 = \text{constans} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (128)$$

г. зн. інварыянты складаны стасунак пучка чатырох датычных да фокальнай цыркулярнай крывой, якія праведзены з адвольнага пункту яе, роўны квадрату стасунку адлегласьцяй фокальнага цэнтру (паасобнага фокусу) крывой ад цэнтраў пучка акружын, утвараючых гэтую крывую.

Апошняя тэорэма таксама маецца ў артыкуле Müller'a, але без падрабязнага доваду.

ГЛАВА V.

§ 1. Розныя способы пабудаваньня цыркулярных крывых.

Маецца шмат спосабаў пабудаваньня цырк. крывых 3-га парадку як агульняга, так і часных відаў.

Пералічаць усе маючыяся ў літаратуры пытаньня спосабы не зьяўляецца мэтазгодным з тэй прычыны, што шмат з іх даюць простае паўтарэньне папярэдніх, адлічваючыся ад іх толькі некаторымі зьмяненьнямі рэдакцыйнага характару.

У пачатку гэтай главы папробуем указаць тыя галоўныя прынцыпы, якія ляжаць у аснове гэткіх пабудаваньняў.

Указаньне такіх прынцыпаў, як пакажам далей на прыкладах, дае магчымасьць ня толькі ўнесьці клясыфікацыю ў даныя раней способы пабудаваньня цыркулярных крывых, але дазваляе інады спросьціць гэтыя способы.

Усе прыёмы пабудаваньня цыркулярных крывых 3-га парадку як даныя раней, так і прывадзімыя ў першы раз у сучаснай рабоце, базуюцца на двох асноўных прынцыпах:

I. Прынцып геомэтрычных месц. На ім па сутнасьці базуюцца ўжо разабраныя ў §§ 13—21 главы I способы палучэньня цыркулярных крывых пры дапамозе двох проектыўных пучкоў простых і акружын, а таксама і астатнія способы I-ай главы.

На гэтым-жа прынцыпе базуюцца способы палучэньня цырк. крывых пры дапамозе: a) катаньня без скальжэньня аднэй крывой па другой, і в) вярчэньня дзьвюх простых навакол двох нярухомых цэнтраў з кутавымі хуткасьцямі, знаходзячыміся ў даным стасунку.

II. Прынцып геомэтрычныхператварэньняў. Цыркулярныя крывыя палучаюцца пры дапамозе розных квадратычных ператварэньняў з крывых больш простага віду альбо простых.

Сюды адносіцца разуважаны падрабязна ў II-й главе сучаснай работы: a) способ інвэрзіі; b) способ названы намі способам антыінвэрзіі, пры якім цыркулярныя крывыя палучаюцца ад ператварэньня параболы альбо простых ліній;

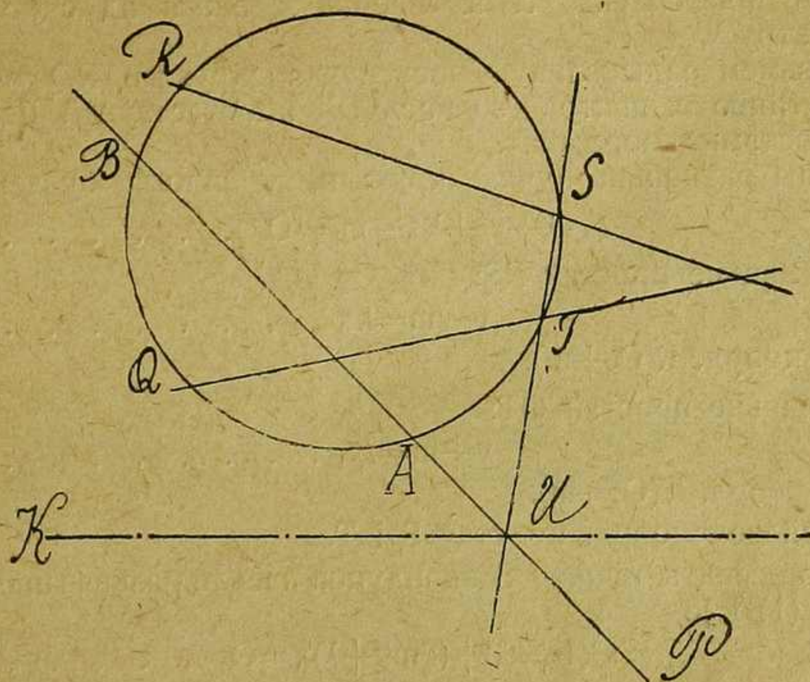
c) спосаб абагульненай інвэрзіі, пры якім цыркулярная крывая можа быць палучана ператварэньнем некаторай акружыны.

Калі мы зможам сконструяваць мэханізм, які ажыцьцяўляе данае ператварэньне, то пры дапамозе яго магчыма і мэханічнае рысаваньне шуканай крывой.

Пакажам зараз падрабязна, якім чынам адбіваюцца адмечаныя вышэй агульныя прынцыпы ў розных работах, якія адносяцца да пабудаваньня цыркулярных крывых.

§ 2. Пабудаваньне цырк. крывых на падставе проектыўных пучкоў акружын і простых.

У „Bulletin of the American Math. Society, Volume XXIX 1923 г. зьмешчана заметка проф. R. M. Mathews, у якой



Рыс. 61.

прапануецца (бяз усякага доваду) наступны спосаб пабудаваньня цыркулярных крывых.

Праз пункты R і Q на акружыны праведзены дзьве простыя RS і QT, якія злучаюцца з акружынай у пунктах S і T. Простая ST злучаецца з данай сталай простай KU у пункце U. Простая PU, праходячая праз сталы пункт P, злучаецца з акружынай у пунктах A і B.

Калі будем праводзіць рад акружын праз пункты R і Q, то геомэтрычным месцам пунктаў A і B будзе цыркулярная крывая.

Можна-б было паказаць, што сапраўды способ, прапануемы проф. Mathews, дае некаторую цыркулярную крывую, але вышэйшага парадку, але гэта не датычыцца непасрэдна да нашай тэмы.

Пакажам тут, што пры некаторым зьмяненьні ўмоў пабудаваньня мы будем тут мець звычайнае пабудаваньне цыркулярнай крывой 3-га парадку пры дапамозе двох проектыўных пучкоў простых і акружын.

Зразумела, што ў гэтым прыёме мы маем гіпэрболічны пучок акружын з цэнтрамі R і Q і пучок лучоў з цэнтрам у P. Застаецца толькі знайсьці ўмовы, пры якіх гэтыя пучкі будуць проектыўны, г. з. лінейна залежны ад супольнага парамэтру λ.

Возьмем радыкальную вось пучка акружын RQ за вось OY, а лінію іх цэнтраў за вось OX простастаўнай Дэкартавай сыстэмы коордынат.

Тады раўнаньне пучка акружын, як вядома, будзе:

$$x^2+y^2+\lambda x-m_2=O \quad \dots\dots\dots (1)$$

Раўнаньне простай RS:

$$y-m=kx \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

бо коорд. R(O,+m).

Раўнаньне простай QT:

$$y+m=lx \quad \dots\dots\dots\dots (3)$$

бо коорд. T(O,—m).

Знойдзем коорд. пунктаў S і T.

Коордынаты пункту S знойдуцца пасьля разьвязаньня сыстэмы (1) і (3)

$$x^2(1+k^2)+(2mk+\lambda)x=O \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$x_1=O;\ x_2=-\frac{2mk+\lambda}{1+k^2};\ y_2=-\frac{2mk^2+\lambda k}{1+k^2}+m=\frac{m-mk^2-\lambda k}{1+k^2}$$

$$S\left[-\frac{2mk+\lambda}{1+k^2},\ \frac{m-mk^2-\lambda k}{1+k^2}\right];$$

Абсцысу пункту T знойдзем з раўнаньня:

$$x^2(1+l^2)-(2lm-\lambda)x=O$$

$$x_1=O;\ x_2=\frac{2lm-\lambda}{1+l^2};\ y_2=\frac{l^2m-\lambda l-m}{1+l^2};\ T\left[\frac{2lm-\lambda}{1+l^2},\ \frac{l^2m-\lambda l-m}{1+l^2}\right] \quad . (6)$$

Раўнаньне простай ST, такім чынам, будзе:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -(2mk+\lambda), & m-mk^2-\lambda k, & 1+k^2 \\ 2lm-\lambda, & l^2m-\lambda l-m, & 1+l^2 \end{vmatrix} = O \quad . \quad . \ (6)$$

Пры раскладаньні гэтага дэтэрмінанту па элемэнтах першай стужкі коэфіцыенты пры x і y будуць мець парамэтр λ зразумела *лінейна,* мінор-жа адпавядаючы элемэнту 1 будзе мець у сваім складзе член $\lambda^2(l-k)$.

Значыцца, раўнаньне простай ST будзе *лінейна* залежаць ад парамэтру λ у тым выпадку, калі $k=l$, г. з. калі простыя RS і QT будуць *паралельны.*

У скарочанай форме раўнаньне простай ST можна напісаць так:

$$A+\lambda B=O \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (8)$$

дзе A і B лінейныя выразы адносна x і y.

Раўнаньне простай KM будзе:

$$C=O \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (9)$$

дзе C таксама лінейна залежыць ад x і y.

Раўнаньне простай, праходзячай праз пункт злучэньня ST і KU, будзе мець форму:

$$A+\lambda B+цC=O \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (10)$$

дзе ц некаторы новы парамэтр.

Так як простая PU павінна прайсьці праз сталы пункт P (α, β), то для знаходжаньня парамэтру ц мы маем умову:

$$\bar{A}+\lambda\bar{B}+ц\bar{C}=O \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 11)$$

дзе—азначаны вынікі падстаноўкі ў выразы A B і C координат пункту P α п β.

Раўнаньне простай PU, такім чынам, будзе:

$$A+\lambda B+C\left[-\frac{\bar{A}}{\bar{C}}-\frac{\bar{B}}{\bar{C}}\cdot\lambda\right]=O \quad . \ . \ . \ . \ (12)$$

альбо

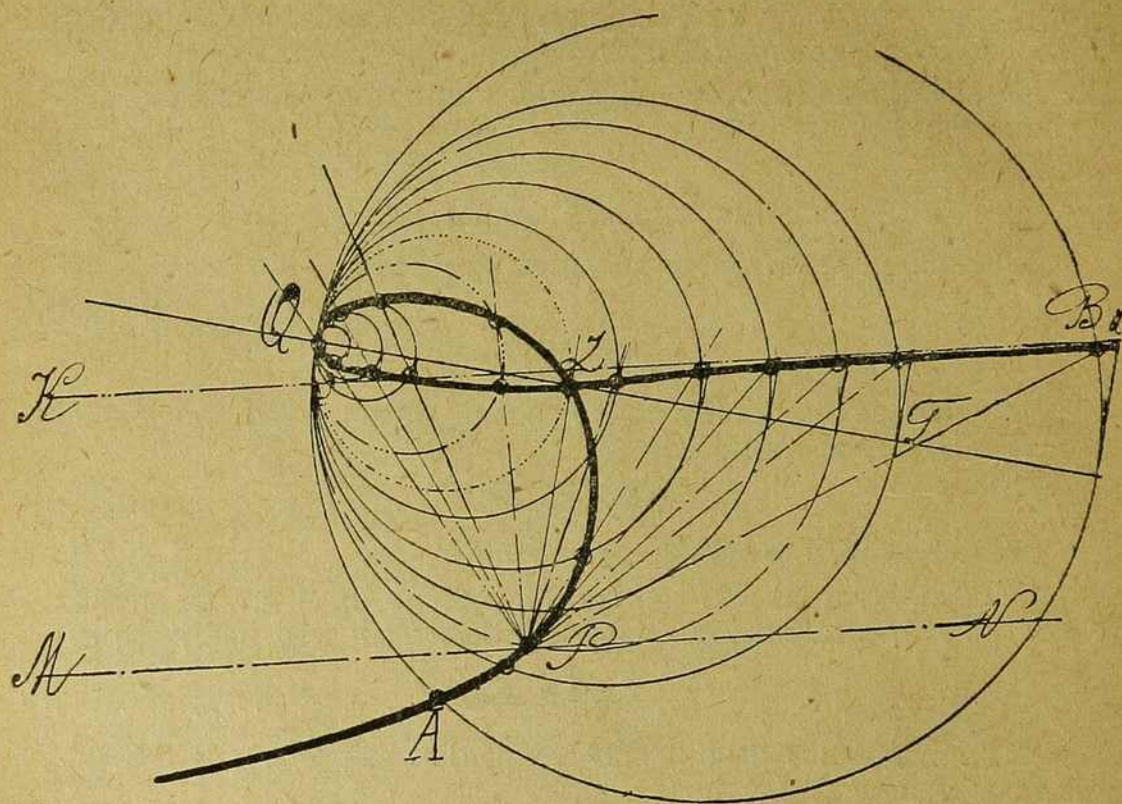
$$M+\lambda N=O \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (13)$$

дзе M і N некаторыя лінейныя функцыі ад x і y.

Адсюль ясна, што пучок акружын (1) і пучок простых (13) проектыўны і, значыцца, утвараюць цыркулярную кры-

вую 3-га парадку. Яе раўнаньне палучым па выключэньні парамэтру λ з сыстэмы (1) і (13).

Спосаб пабудаваньня цырк. крывой зусім зразумелы з папярэдняга. Яшчэ прасьцей узяць параболічны пучок акружын. Тады досыць спускаць пэрпэндыкуляры з канца дыямэтру кожнай акружыны да злучэньня са сталай простай K. Злучаючы асновы гэтых пэрпэндыкуляраў простымі са сталым пунктам P, мы і палучым у злучэньні з адпаведнай акружынай пучка пункты цыркулярнай крывой. Гэтае пабудаваньне зроблена на рысунку 62.



Рыс. 62.

Q—цэнтр параболічнага пучка акружын.

KU—сталая простая.

P — сталы пункт. Ён зьяўляецца галоўным пунктам крывой.

MN—сапраўдная асымптота крывой.

A і B два адвольных пункты крывой.

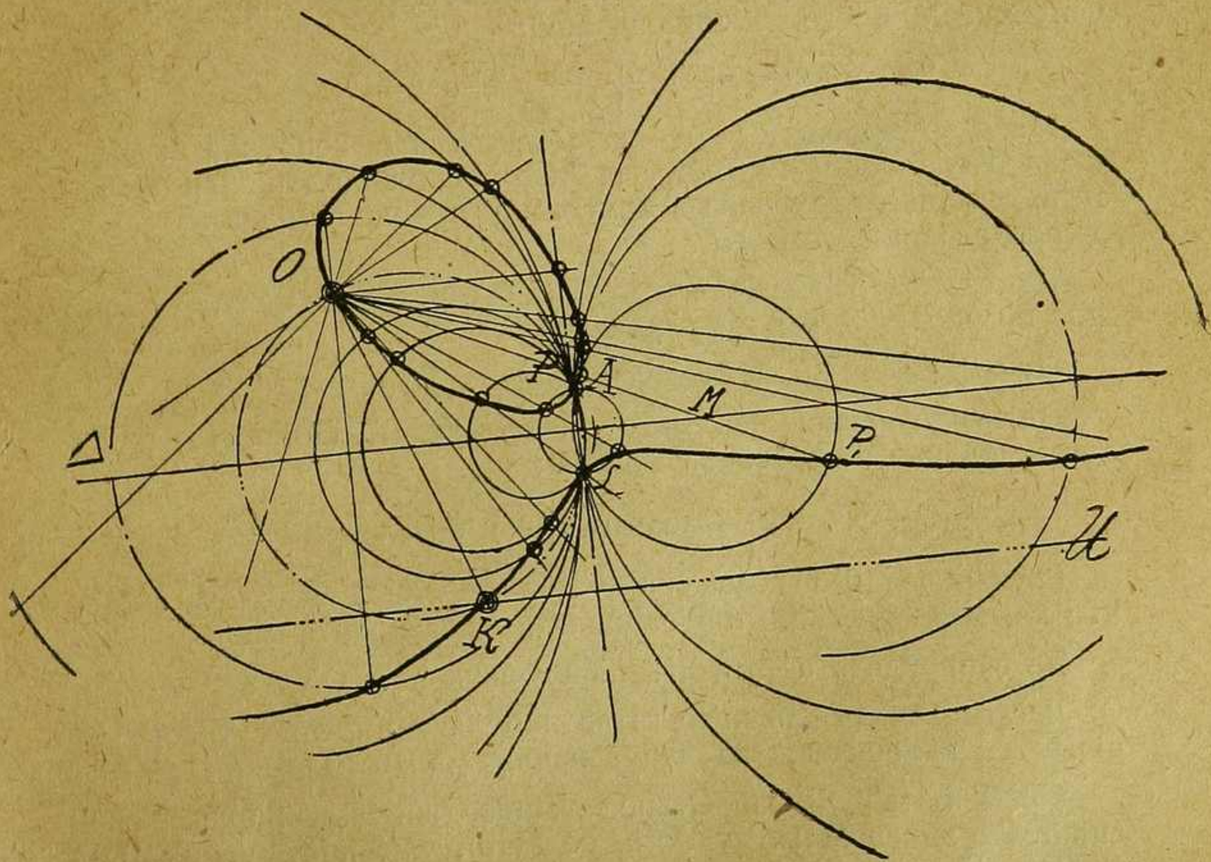
Цыркулярная крывая палучылася з падвойным пунктам Z, што зусім згодна з вынікамі § 16 главы I-ай.

Гэты спосаб пабудаваньня цыр. крывой 3-га парадку прыводзіцца тут у першы раз. Ня цяжка вывесьці і раўнаньні палучаных гэтым спосабам крывых. Зразумела, што сталы пункт заўсёды будзе галоўным пунктам крывой, а яе сапраўдная асымптота заўсёды паралельна сталай простай.

§ 3. Lagrange ў артыкуле „Sur les cubiques strophoidales", зьмешчаным у Nouv. Annales Math. (3), (19) стар. 65—74, прапануе гэткі спосаб пабудаваньня цырк. крывых 3-га парадку: Няхай на роўніцы даны два пункты O і A і некаторая простая ◁. На простай ◁ узяты зьменны пункт M. На простай OM узяты два пункты P і P_1 такія, што

$$MP = MP_1 = MA$$

тады геомэтрычным месцам пучкоў P і P_1 будзе некаторая цыркулярная крывая 3-га парадку, якую аўтар называе *строфоідалай*. Пабудаваньне зроблена на рысунку (63).



Рыс. 63.

Палучылася дзьвюхгалінная цырк. крывая такога самага выгляду, як і на рыс. 11-12 § 16 главы I.

Няцяжка паказаць, што тут палучаецца пучок лучоў з цэнтрам у O і проектыўны да яго пучок акружын.

Возьмем даную простую за вось OX, пэрпэндыкуляр на яе з сталага пункту O—ON за вось OY. Координаты пункту O няхай будуць (O, c). Координаты пункту A азначым праз (a, b).

Раўнаньне простай OM.

$$y-c=\lambda x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

дзе λ зьменны парамэтр. Координаты пункту M навочна будуць: $\left(-\frac{C}{2}, O\right)$.

Раўнаньне пучка акружын, маючых цэнтр на простай $\triangleleft$ у пункце M, будзе па спрашчэньні:

$$2c(x-a)+\lambda[x^2+y^2-(a^2+b^2)]=O \quad . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Маем гіпэрболічны пучок. Першая яго асноўная акружына распадаецца на простую AL і бяскрайна далёкую простую, другая—акружына з цэнтрам у пункце N (пачатку координат) і радыусам NA.

Цэнтрамі гіпэрболічнага пучка (15) будуць пункты A і L, сымэтрычны з A адносна простай $\triangleleft$.

Пучкі (14) і (15), зразумела, проектыўныя.

Па выключэньні парамэтру λ з сыстэмы (14) і (15) палучым раўнаньне шуканай крывой:

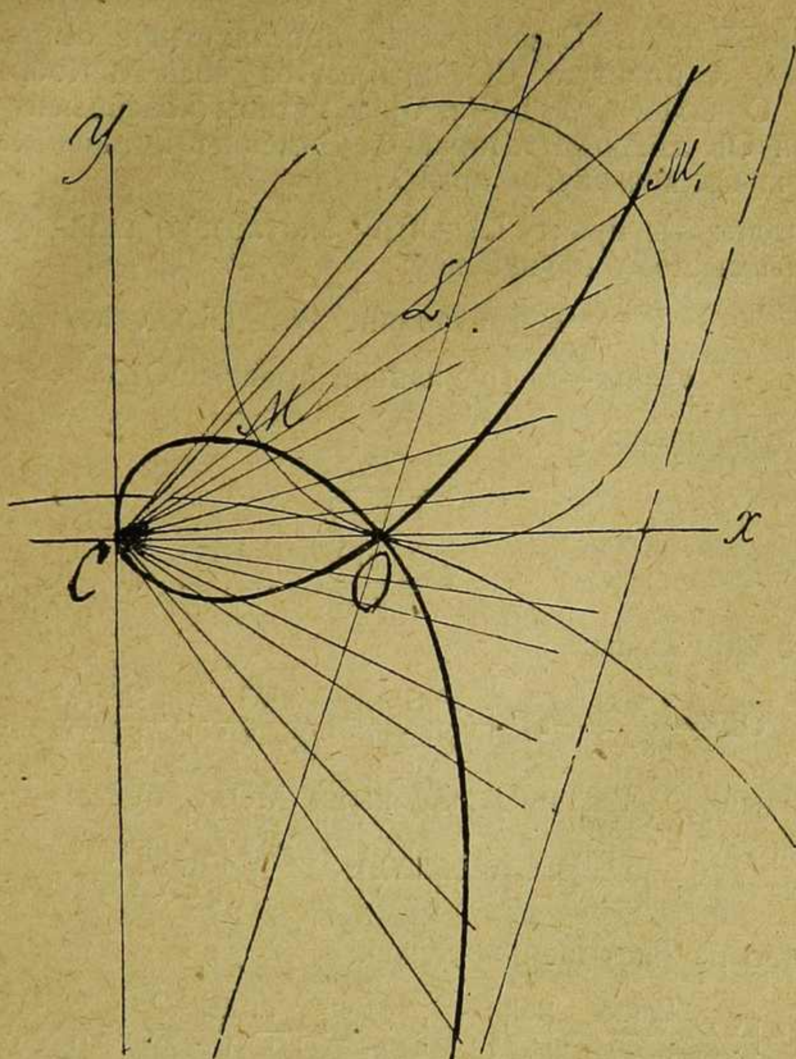
$$y(x^2+y^2)+cx^2-cy^2-2acx-(a^2+b^2)\,.\,y+c(a^2+b^2)=O \quad . \quad 16$$

Раўнаньне (16) паказвае, што пункт O ёсьць асаблівы фокус крывой; $\triangleleft$ ёсьць нішто іншае як мэдыяна крывой.

Яе сапраўдная асымптота паралельна восі OX.

Лёгка разуважыць, што гэтае пабудаваньне па сутнасьці нічым ня адлічваецца ад пабудаваньняў § 16 главы I.

§ 4. У артыкуле Jan Cyane, „Etudes sur les cubiques circulaires", зьмешчаным у Jorn. de Math. Spéciales V, 2, ап 1899 р. 99, аўтар прапануе паміж іншым гэткі спосаб пабудаваньня строфоіды. (Рысунак 64).



Рыс. 64.

Няхай дана простая OL, пункт на гэтай простай O і друг азначаны пункт C, знадворку першай простай. Праз пункт C можна правесьці сякучую, якая злучаецца з простай у пункце L, і ўзяць на гэтай сякучай два адрэзкі LM і LM_1 роўныя LO. Месца пунктаў M і M_1 будзе строфоіда. Строфоіда будзе простай, калі кут COL роўны 90^0.

Ясна, што гэты спосаб зьяўляецца часным выпадкам папярэдняга, калі пунк A будзе ляжаць на простай ◁. Мы будзем мець параболічны пучок акружыны (у выпадку пэрпэндыкулярнасьці LO і CO гэта відавочна).

Лёгка паказаць, што і ў выпадку косага кута COL мы будзем мець проектыўныя пучкі простых і акружын.

Возьмем пункт C за пачатак простакутнай сыстэмы каардынат, а простую CO прымем за вось X. Каардынаты пункту O няхай будуць (a, o), а кутавы коэфіцыент сталай простай OL азначым літараю k. Зьменны кутавы коэфіцыент луча CL абазначым праз λ.

Каардынаты пункту L (цэнтру акружыны) знойдзем, разьвязаўшы сыстэму раўнаньняў:

$$y=\lambda \text{ (раўнаньне луча CL)} \quad \ldots\ldots (16)$$

$$y=k(x-a) \text{ (раўнаньне простай OL)} \quad \ldots (17)$$

З іх находзім:

$$x=\frac{ak}{k-\lambda} \quad \ldots\ldots (18)$$

$$y=\frac{ak\lambda}{k-\lambda} \quad \ldots\ldots (19)$$

радыус акружыны:

$$OL^2=\left(\frac{ak}{k-\lambda}-a\right)^2+\frac{a^2k^2\lambda^2}{(k-\lambda)^2}=\frac{a^2\lambda^2}{(k-\lambda)^2}+\frac{a^2k^2 . \lambda^2}{(k-\lambda)^2} \quad \ldots (20)$$

Значыцца, раўнаньне акружыны MOM_1 будзе:

$$\left(x-\frac{ak}{k-\lambda}\right)^2+\left(y-\frac{ak\lambda}{k-\lambda}\right)^2=\frac{a^2\lambda^2+a^2 . k^2 . \lambda^2}{(k-\lambda)^2} \quad \ldots (21)$$

альбо па расчыненьні дужак:

$$x^2+y^2-\frac{2akx}{k-\lambda}-\frac{2ak\lambda}{k-\lambda}.y+\frac{a^2k^2}{(k-\lambda)^2}+\frac{a^2k^2\lambda^2}{(k-\lambda)^2}=\frac{a^2\lambda^2}{(k-\lambda)^2}+$$

$$+\frac{a^2k^2 . \lambda^2}{(k-\lambda)^2} \quad \ldots\ldots (22)$$

па злучэньні падобных членаў маем:

$$x^2+y^2-\frac{2ak}{k-\lambda}.x-\frac{2ak . \lambda}{k-\lambda}.y+\frac{a^2(k+\lambda)}{k-\lambda}=O \quad \ldots (23)$$

Зьнішчыўшы назоўнік і ўзяўшы λ за дужкі, палучым:

$$k(x^2+y^2)-2akx+a^2k-.\lambda(x^2+y^2+2aky-a^2)=O \quad . (24)$$

Раўнаньні (16) і (24) ясна паказваюць, што і ў агульным выпадку пабудаваньня Суапе мы маем проектыўныя пучкі простых і акружын.

Асноўныя акружыны пучка (24):

$$k(x^2+y^2)-2ak+a^2k=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

і

$$x^2+y^2+2aky-a^2=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Скараціўшы раўнаньне (25) на k ($k \neq 0$) мы палучым:

$$x^2+y^2-2ax+a^2=O, \text{ альбо } (x-a)^2+y^2=O \quad . \quad . \quad (27)$$

1-я асноўная акружына пучка зьвяртаецца ў пункт O.

Раўнаньню (26) можна даць выгляд:

$$x^2+(y+ak)^2=(a\sqrt{1+k^2})^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Другая асноўная акружына пучка ёсьць сапраўдная акружына, маючая цэнтр у пункце (O,—ak) і радыус:$a\sqrt{1+k^2}$.

Для пабудаваньня яе трэба працягнуць простую LO да злучэньня з працягненьнем восі OY у пункце N (гэты пункт не зьмяшчаецца на рыс. 64) і апісаць акружыну радыусам роўным $NO=a\sqrt{1+k^2}$.

Урэшце мы палучаем параболічны пучок акружын, датычных у пункце O, што зусім згодна з агульнай тэорый аб утварэньні крывых з падвойным пунктам.

Раўнаньне строфоіды палучым выключыўшы λ з раўнаньняў (17) і (24)

$$(kx-y).(x^2+y^2)-2akx^2-2aky^2+a^2kx+a^2y=O \quad . \quad . \quad (29)$$

Пры k=O строфоіда распадаецца на вось x і акружыну радыусу a.

Першая асноўная акружына пучка ў гэтым выпадку ня азначана, раўнаньне другой будзе:

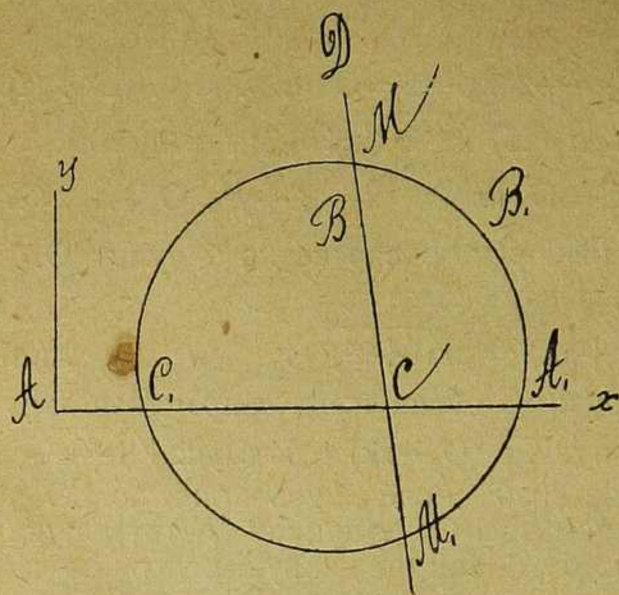
$$x^2+y^2-a^2=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Пры $k=\infty$ строфоіда будзе простай [раўн. (72) § 11 главы 2-й].

Мы будзем мець параболічны пучок акружын, прычым 1-я асноўная акружына будзе пунктам, а другая вырађжаецца ў вось OX.

§ 5. G. F Texeira, у артыкуле „Sur une maniere de construire les cubiques circulaires“. Nonv. Ann. Math. 4 Sèrie T. 16 1916 ап, прапануе наступны спосаб пабудаваньня цыркулярнай крывой агульнага віду (Рыс. 65).

Возьмем на роўніцы чатыры пункты A, B, A_1 i B_1. Праз пункт B правядзем простую D i азначым літараю C пункт, у якім яна злучаецца з простай AA_1.



Рыс. 65.

Потым возьмем на простай AA_1 пункт C_1 такі, каб стасунак адлегласьцяй C i C_1 ад пункту A быў роўны сталай дадзенай колькасьці c. Апішам акружыну, праходзячую праз пункты A_1 B_1 i C_1. Гэтая акружына злучыцца з простай D у двох пунктах M i M_1, якія апішуць цыркулярную крывую 3-га парадку, калі напрамак простай D будзе зьмяняцца.

Прымаем пункт A за пачатак простак. Дэкартавай сыстэмы координат. AA_1 возьмем за вось абсцыс i абазначым адпаведна праз a, b), (h, o) i (a_1 b_1) координаты пунктаў B A_1 п B_1.

Раўнаньне простай D будзе:

$$y-b=m(x-a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Гэтая простая злучыцца з восьсю абсцыс у пункце C, якога абсцыса знаходзіцца з раўнаньня

$$x_1=a-\frac{b}{m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Раўнаньне акружыны, праходзячай праз пункт A_1 i маючай цэнтр у пункце з координатамі (α, β) будзе.

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y=h^2-2h\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Умова, каб яна прайшла праз пункт B_1, будзе:

$$a_1{}^2+b_1{}^2-2a\,.\,a_1-2\beta b_1=h^2-2h\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

З апошняй умовы можна знайсьці β i падставіць яго выраз у раўнаньне (33), (b_1 мы палагаем ня роўным O).

Урэшце палучым раўнаньне акружын, праходзячых праз пункты A_1 і B_1:

$$b_1(x^2+y^2)-2b_1\alpha x-(a_1^2+b_1^2-2\alpha a_1+2h\alpha-h^2)\,.\,y=$$
$$=b_1(h^2-2h\alpha)\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(35)$$

Гэтыя акружыны злучацца з восьсю абсцыс у пункце A_1 і яшчэ ў другім пункце C_1, абсцыса якога x_2 знойдзецца з раўнаньня:

$$x_2=2\alpha-h\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(36)$$

Па ўмове мы маем:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{ma-b}{m(2\alpha-h)}=c\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(37)$$

Выключыўшы цяпер m і α з раўнаньняў (35), (36) і (37), мы палучым раўнаньне крывой, апісанай пунктамі злучэньня простай D і акружыны (33), а іменна

$$[(ch+a)(y-b)-b(x-a)]\,.\,[b_1x+(h-a_1)y-hb_1]=c(y-b)\,.$$
$$.\,[b_1(x^2+y^2)-(a_1^2+b_1^2-h^2)y-b_1h^2]\quad.\;.\;.\quad(38)$$

альбо па спрашчэньні:

$$cb_1(x^2+y^2)\,.\,y=bb_1(c-1)x^2+[(ch+a)\,.\,b_1-b(h-a_1)]xy+[c(a_1^2+$$
$$b_1^2+bb_1-h\,.\,a_1)+a(h-a_1)]y^2+bb_1\,.\,h(1-c)x+[bc(ha_1-a_1^2-b_1^2)-$$
$$-ahb_1]y\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(39)$$

Раўнаньне (39) паказвае, што цыркулярная крывая, якую яно выражае, праходзіць праз пункты A, A_1, B і B_1 і што яе сапраўдная асымптота паралельна простай AA_1.

Спосаб, які ўказвае Texeira, зводзіцца да агульнага закону ўтварэньня цыркулярных крывых пры дапамозе проектыўных пучкоў і акружын.

Зразумела, што пункт B зьяўляецца цэнтрам пучка лучоў. Пункты A_1 і B_1 будуць цэнтрамі гіпэрболічнага пучка акружын. Кожная з акружын пучка павінна яшчэ праходзіць праз зьменны пункт C_1, зьвязаны з палажэньнем луча пучка B пры дапамозе суадносшаньня $AC:AC_1=\text{contans}$, дзе C_1 зьменны пункт злучэньня луча са сталай простай AA_1.

Ня цяжка паказаць, што аўтарам і ўстанаўляецца проектывітэт двох геомэтрычных вобразаў пры дапамозе гэтага зьменнага пункту C_1, праз які павінны праходзіць акружыны пучка.

Для спрашчэньня вылічэньняў возьмем косакутную сыстэму координат, прыняўшы простую A_1B_1 за вось X, а про-

стую A_1A за вось у. Абазначым координаты пункту B— цэнтру пучка лучоў праз (a, b). Координаты пункту A няхай будуць (o, h), пункту B_1 : (c, o). Няхай

$$AC : AC_1 . = l$$

Раўнаньне простай BC будзе:

$$(x-a)+\lambda(y-b)=O \quad \ldots\ldots\ldots (40)$$

дзе λ—зьменны парамэтр пучка лучоў (40)

Координаты пункту C палучым з сыстэмы (40) і $x=o$. Яны будуць $\left(o, \frac{a+\lambda b}{\lambda}\right)$.

Координаты пункту C_1 знойдзем на падставе формул координат пункту, які дзеліць адлегласьць паміж двума данымі пунктамі ў даным стасунку: $\frac{1}{l-1}$

Сапраўды, $\frac{AC}{AC_1}=l$; $\frac{AC_1+C_1C}{AC_1}=l$; $1+\frac{C_1C}{AC_1}=l$; $\frac{C_1C}{AC_1}=l-1$; $\frac{AC_1}{C_1C}=\frac{1}{l-1}$; Координаты пункту C_1 будуць:

$$\left[O, \frac{a+\lambda(hl+b-h)}{\lambda l}\right] \quad \ldots\ldots (41)$$

Раўнаньне акружыны, праходзячай праз пачатак координат A_1 (0, 0), будзе:

$$x^2+2xy . \cos\omega+y^2+Ax+By=O \quad \ldots . (42)$$

Гэта акружына праходзіць праз пункт B_1 (c, a), адсюль знойдзем раўнаньне для знаходжаньня коэфіцыенту A:

$$c^2+Ac=O \quad \ldots\ldots\ldots (43)$$

Адкуль, так як c ня роўна O, получаем $A=-c$;

Але акружына (42) па ўмове павінна прайсьці і праз пункт C_1, адкуль палучаем магчымасьць знайсьці і B праз λ з наступнага раўнаньня:

$$\left[\frac{a+\lambda(hl+b-h)}{\lambda l}\right]^2+B . \frac{a+\lambda(hl+b-h)}{\lambda l}=O \quad . . (44)$$

З тэй прычыны, што наогул пункт C_1 не супадае з A_1, мы знаходзім

$$B=-\frac{a+\lambda(hl+b-h)}{\lambda l} \quad \ldots\ldots (45)$$

Такім чынам, акружыны (42) вызначаюцца раўнаньнем

$$x^2+2xy\cos\omega+y^2-cx-(hl+b-h)y-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{a}{l}=0 \quad . \quad . \quad (46)$$

Канчаткова, мы маем *пучок акружын:*

$$\frac{a}{l}y-\lambda\,.\,[x^2+2xy\cos\omega+y^2-cx-(hl+b-h)y]=0 \quad . \quad (47)$$

Урэшце мы маем два проектыўных пучка лучоў (40) і акружын (47)

Адна з асноўных акружын пучка ёсьць вось OX.

Для палучэньня раўнаньня шуканай цыркулярнай крывой дастаткова выключыць парамэтр λ з сыстэмы раўнаньняў (40) і (47).

Палучым гэткае раўнаньне цыркулярнай крывой (зразумела, у косакутнай сыстэме):

$$l(x-a)[x^2+2xy\cos\omega+y^2]-lc(x-a)\,.\,x+(x-a)\,.\,y\,.\,(h-b-lh)+$$
$$+ay(y-b)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

З раўнаньня (48) яшчэ лягчэй ніж з папярэдняга можна бачыць усе ўласьцівасьці гэтай крывой. Напрыклад, упэўніцца ў тым, што крывая пройдзе праз усе чатыры даных пункты: A, A_1 B і B_1 і г. д.

§ 6. Можна зьмяніць спосаб Техеіга такім чынам, каб пункт C_1, праз які павінны праходзіць акружыны пучка, знайсьці з умовы:

$$\frac{A_1C}{A_1C_1}=\text{constans} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

У гэтым выпадку пунктам C будуць дзяліцца ў сталым стасунку хорды акружын пучка, праходзячыя праз адзін з цэнтраў гэтага пучка (A_1). Палучаюцца зноў два проектыўных пучка лучоў і акружын. Яны ўтвораць новую цыркулярную крывую.

Сапраўды, возьмем зноў косакутную сыстэму коордынат з пачаткам у пункце A_1 Раўнаньне луча, праходзячага праз B, будзе па старому:

$$x-a+\lambda(y-b)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Раўнаньне акружын, праходзячых праз пункты A_1 і B_1, будзе:

$$x^2+2xy\cos\omega+y^2-cx+By=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

З раўнаньня:

$$\frac{A_1C}{A_1C_1}=l,$$ знойдзем координаты пункту C_1 (o, y)

Апошняе раўнаньне можна перапісаць наступным чынам, вызначыўшы ўваходзячыя туды адрэзкі праз координаты іх канцоў:

$$\frac{\frac{a+\lambda b}{\lambda}}{y}=l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

$$\text{Адкуль } y=\frac{a+\lambda b}{\lambda . l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Коэфіцыент B у раўнаньні акружын (51) знойдзем, як раней, з умовы:

$$\left(\frac{a+\lambda b}{\lambda l}\right)^2+B.\frac{a+\lambda b}{\lambda l}=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Адкуль $B=-\frac{a+\lambda b}{\lambda . l}$, бо пункт C_1 наогул не супадае з пунктам A_1.

Такім чынам, палучаем раўнаньне пучка акружын проектыўнага да пучка лучоў (50):

$$x^2+2xy\cos\omega+y^2-cx-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{a}{l}\cdot y-\frac{by}{l}=O \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

альбо

$$\frac{by}{l}-\lambda[x^2+2xy\cos\omega+y^2-cx-\frac{a}{l}y]=O \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Раўнаньне шуканай цыркулярнай крывой палучым у гэткім відзе

$$l.(x-a)(x^2+2xy\cos\omega+y^2)-lcx^2-axy+by^2+alcx+$$
$$+(a^2-b^2)y=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Раўнаньне (57) палучана выключэньнем парамэтру λ з раўнаньняў (50) і (56).

У гэткай формуліроўцы гэты новы спосаб пабудаваньня цыркулярных крывых мае некаторую аналёгію са спосабам § 16 главы I: там адпаведны луч дзяліў напалам дыямэтр акружыны, тут ён дзеліць у сталым стасунку хорду яму адпа-

вядаючай акружыны; палажэньне хорды азначаецца двума сталымі пунктамі A і A_1.

§ 7. Калі возьмем цыркулярную крывую, праходзячую праз пачатак каардынат і маючую сапраўдную асымптоту, паралельную восі OX, то яе раўнаньне будзе:

$$y(x^2+y^2)=Hx^2+Kxy+Ly^2+Mx+Ny \quad . \ , \ . \ (58)$$

Для таго каб крывая (58) была тожсама з крывой (39) § 5, неабходна і дастаткова, каб

$$b(c-1)=cH \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ (59)$$
$$(ch+a)b_1-b(h-a_1)=Kc\,.\,b_1 \quad \ldots\ldots \ (60)$$
$$c(a_1^2+b_1^2+bb_1-ha_1)+a(h-a_1)=Lcb_1 \quad \ldots \ (61)$$
$$bh(1-c)=Mc \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ (62)$$
$$bc(ha_1-a_1^2-b_1^2-b_1^2)-ahb_1=Ncb_1 \quad \ldots \ (63)$$

Гэта значыць, мы маем пяць раўнаньняў для знаходжаньня шасьці коэфіцыентаў: a, b, c, a_1, b_1 і h. Адзін з іх стала быць адвольны (напр., a). З тэй прычыны, што b ёсьць ордыната крывой адпавядаючая абсцысе a, то зн. пункт B(a, b) на крывой (39) можна ўзяць адвольна на крывой, і мы можам пабудаваць крывую (58) па мэтоду § 5 шмат спосабамі.

З раўнаньняў (59) і (62) находзім: $c=\dfrac{b}{b-H}$ і $h=-\dfrac{M}{N}$, а з раўнаньняў (60) і (63) заключаем, што пункт B_1 (a_1, b_1) ёсьць адзін з пунктаў злучэньня простай

$$(ch+a-Kc)\,.\,y+bx-bh=O \quad \ldots\ldots \ (64)$$

з акружынай:

$$bc(x^2+y^2)+(Nc-ah)\,.\,y-bchx=O \quad . \ . \ , \ . \ (65)$$

Другім пунктам іх злучэньня будзе відавочна пункт A_1 (h, o).

На падставе гэгага можна высказаць наступную тэорэму:

Возьмем на якой-неб. цыркулярнай крывой чатыры пункты A, A_1, B і B_1 *такія, каб* A і A_1 *ляжалі на паралелі да сапраўднай асымптоты крывой і пункт* B_1 *супадаў з другім пунктам злучэньня простай* A_1 B^1 (64) *з акружынай* (65). *Тады на падставе § 6 усякая акружына, праходзячая праз пункты* A_1 і B_1, *злучаецца з крывой у двох пунктах, ляжачых на простай, праходзячай праз* B. *Акружына і простая злучаюцца з простай* A_1 A *у двох пунктах* C і C_1 *такіх, што стасунак* AC *да* AC_1 *сталы.*

Разгледзім гранічны выпадак, калі пункт A_1 супадае з А, а пункт B_1 таксама імкнецца супасьці з пунктам А, апісваючы простую даную раўнаньнем $x=ky$.

Палажыўшы ў сілу гэтага ў раўнаньні (39) § 5 $h=O$ і $a_1=kb_1$, а потым $b_1=O$, палучым такое раўнаньне для шуканай крывой:

$$c(x^2+y^2)\,.\,y=b(c-1)x^2+(a+bk)xy+(cb-ak)y^2 \quad . \quad . \quad (66)$$

якое, зразумела, дае цыркулярную крывую з падвойным пунктам у пачатку координат А.

Акружыны (35), праходзячыя праз пункты A_1 і B_1, будуць у граніцы датычнымі да простай $x=ky$ у пункце А.

Маем наступную теорэму:

Возьмем на роўніцы дзьве простыя $Д_1$ і $Д_2$ *і пункт* B. *Праз апошні пункт правядзем простую* Д *зьменнага напрамку і абазначым праз* С *пункт, у якім яна злучаецца з простаю* $Д_1$. *Возьмем на апошняй простай пункт* C_1 *так, каб*

$$\frac{AC}{AC_1}=\text{constans}$$

і апішам акружыну, датычную да простай $Д_2$ *у пункце* А, *праходзячую праз пункт* C_1.

Гэтая акружына злучыцца з простай Д *у двох пунктах, якія апісваюць цыркулярную крывую з падвойным пунктам у* А, *калі напрамак простай* Д *зьмяняецца. Сапраўдная асымптота гэтай крывой паралельна простай* Д. Раўнаньнем крывой будзе раўнаньне (66).

Наадварот, калі дана нейкая цыркулярная крывая з падвойным пунктам:

$$(x^2+y^2)\,.\,y=Hx^2+Kxy+Ly^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

то ўмовамі тожсамасьці гэтай крывой з крывой (66) будуць

$$b(c-1)=cH \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

$$a+bk=c\,.\,K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

$$cb-ak=cL \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

Сыстэма раўнаньняў (68) 69 і (70) дае магчымасьць знайсьці тры сталых з чатырох: a b c і k; гэта зн. што адна з іх астаецца адвольнай.

Калі возьмем за адвольную сталую k, то можам знайсьці b з раўнаньня:

$$b = \frac{Hk^2 + Kk + L}{1 + k^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (71)$$

а потым c і a з раўнаньняў (68) і (70).

Такім чынам, маем наступную тэорэму:

Возьмем на роўніцы некаторай цыркулярнай крывой з падвойным пунктам дзьве простых $Д_1$ і $Д_2$, *праходзячых праз гэты падвойны пункт і направім* $Д_1$ *паралельна сапраўднай асымптоце крывой. Правядзем потым акружыну зьменнага радыусу, якая датычыцца простай* $Д_2$ *у пункце* A *(пункт злучэньня простых* $Д_1$ і $Д_2$*). Гэтая акружына злучыцца з крывой у двох пунктах, распаложаных на простай* Д, *праходзячай праз сталы пункт* B. *Простая* Д *і акружына зьменнага радыусу злучаюцца з простай* $Д_1$ *у двох пунктах* C і C_1 *такіх, што*

$$AC : AC_1 = \text{constans},$$

$\frac{1}{k}$ ёсьць кутовы коэфіцыент простай $Д_2$ ($Д_1$—ёсьць вось X).

Калі простыя $Д_2$ і $Д_1$ узаемна пэрпэндыкулярны, то крывая (66) палучае яшчэ больш простае раўнаньне:

$$c(x^2 + y^2) \cdot y = b(c-1)x^2 + axy + cby^2 \quad . \; . \; . \; . \; (72)$$

Апошнія тры тэорэмы адносна цыркулярных крывых таксама належаць да Texeira і зьмешчаны ў яго мэмуары, памянёным у § 5 гэтай главы.

§ 8. Hendriks (у сваім артыкуле: „Demonstration of proposition“, Analyst IV, 1887) паказаў, што пры катаньні параболы па роўнай ёй параболе вяршыня рухомай параболы апісвае цысоіду Дыоклэса.

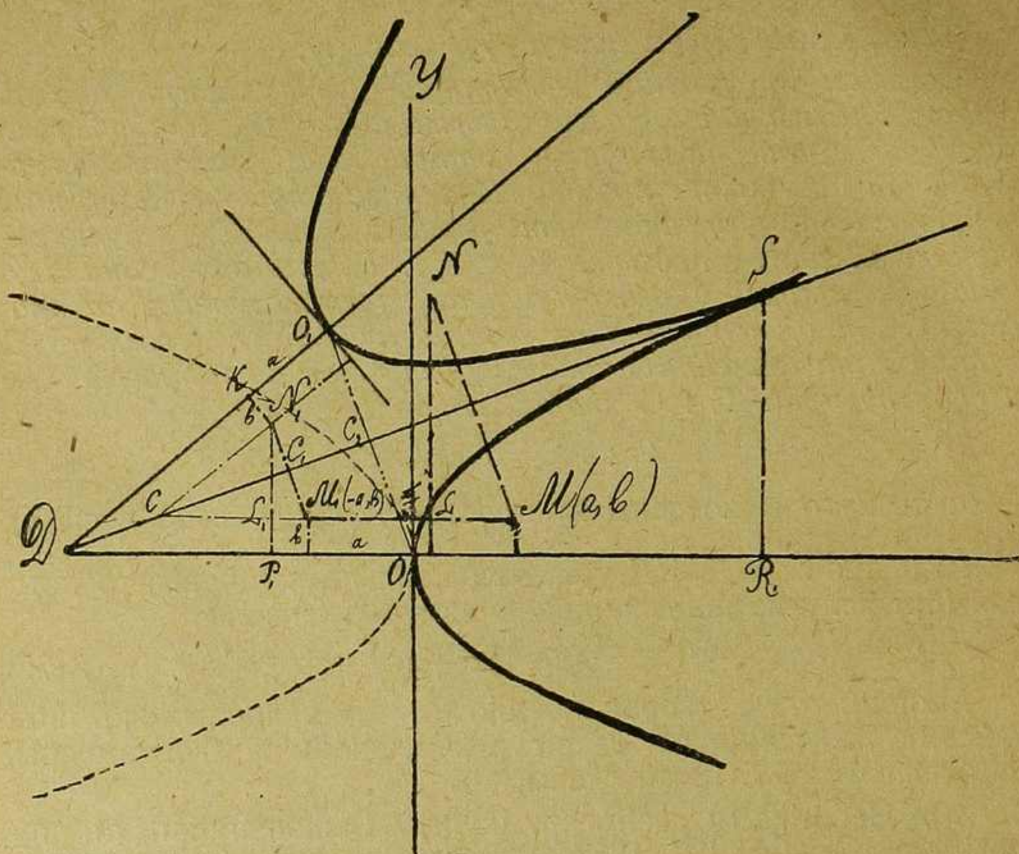
У тэорыі строфоіды даводзіцца, што аснова дырэктрысы рухомай параболы апісвае простую строфоіду.

Можна паставіць больш агульную задачу і шукаць крывыя, якія апісвае адвольны пункт, зьвязаны з рухомай параболай пры катаньні яе без скальжэньня па роўнай ёй нярухомай параболе, прычым восі гэтых парабол у пачатковы момант руху твораць кут у 180^0.

Няхай некаторая парабола: $y^2 = -2px$ (рыс. 66) коціцца без скальжэньня па параболе $y^2 = 2px$.

Якую крывую на роўніцы нярухомай параболы апісвае нейкі пункт M, зьвязаны нязьменна з рухомай параболай?

Разгледзім параболы ў той момант, калі яны датычацца адна да другой у пункце S. DS—іх супольная датычная. З рысунку (66) відна, што крывая, утвораная рухам пункту M(a, b), нязьменна зьвязаным з рухомай параболай: $y^2=-2px$, можа быць разглежана як геомэтрычнае месца



Рыс. 66.

пункту N_1—люстранага адражэньня пункту M_1 (—a, b) ад супольных датычных абедзьвюх парабол.

Пункт M_1 сам зьяўляецца люстраным адражэньнем „абразуючага“ пункту M ад супольнай датычнай у пачатковы момант руху (ад восі OY).

Сапраўды, пункт M зойме палажэньне N_1 [гл. рыс. (66)], а $N_1C_1=C_1M_1$ і $N_1M_1 \top$ да DS, і $M_1F=FM$.

Знойдзем геомэтрычнае месца пункту N_1. Азначым яго коардынаты адносна сыстэмы XOY праз X і Y. так, што

$$N_1P_1=Y$$
$$OP_1=X$$

З падобнасьці трыкутнікаў $N_1L_1M_1$ і DSR можам напісаць:

$$\frac{N_1L_1}{DR}=\frac{L_1M_1}{SR} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (73)$$

Калі абазначым координаты пункту S праз x_1 і y_1, то пропорцыя (73) можа быць перапісана такім чынам:

$$\frac{Y-b}{2x_1}=-\frac{X+a}{y_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (73a)$$

Адрэзак $(X+a)$ адмоўны, значыцца, у пропорцыі яго трэба ўзяць са знакам—

Раўнаньне (73а) лёгка перапісаць так: (з тэй прычыны што $y_1^2=2px$)

$$\frac{Y-b}{X+a}=-\frac{y_1}{p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (74)$$

Патрэбнае нам раўнаньне (74) можа быць палучана і чыста аналітычным шляхам: Раўнаньне датычнай DS будзе: $yy_1=p(x+x_1)$. Раўнаньне пэрпэндыкуляру да гэтай датычнай праз пункт M_1 $(-a, b)$:

$$Y-b=-\frac{y_1}{p}(X+a).$$

Адсюль:

$$\frac{Y-b}{X+a}=-\frac{y_1}{p}$$

гэта знач. зноў палучылі раўнаньне (74).

З другога боку, маем

$$N_1L_1^2+M_1L_1^2=N_1M_1^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (75)$$

N_1M_1 ёсьць падвойная даўжыня пэрпэндыкуляру з пункту M_1 на супольную датычную DS.

$$M_1C_1=\frac{by_1-p(-a+x_1)}{\sqrt{y_1^2+p^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (75a)$$

Пасьля падстаноўкі ў роўнасьць (75) выразаў, уваходзячых у яго адрэзкаў, палучым:

$$(X+a)^2+(Y-b)^2=\frac{4\,.\,(by_1+ap-px_1)^2}{p^2+y_1^2} \quad . \; . \; . \; (76)$$

Для палучэньня раўнаньня шуканага геомэтрычнага месца пункту M_1 трэба выключыць x_1 і y_1 з раўнаньняў (74) і (76) і раўнаньня

$$y_1^2=2px_1 \quad \dots\dots\dots (77)$$

З (74) маем:

$$y_1=-p\cdot\frac{Y-b}{X+a}$$

З (77) пры дапамозе (74) находзім, што

$$x_1=\frac{p}{2}\cdot\frac{(Y-b)^2}{(X+a)^2} \quad \dots\dots\dots (78)$$

Падставіўшы гэтыя выразы x_1 і y_1 у раўнаньне (76), палучым:

$$(X+a)^2+(Y-b)^2=\frac{4\cdot\left[-bp\cdot\frac{Y-b}{X+a}+ap-\frac{p^2}{2}\cdot\frac{(Y-b)^2}{(X+a)^2}\right]^2}{p^2+p^2\cdot\frac{(Y-b)^2}{(X+a)^2}} \quad \dots (97)$$

Скараціўшы дроб, стаячы ў правай частцы раўнаньня (79) на 4, p^2 і $\frac{1}{(X+a)^2}$ мы палучаем:

$$(X+a)^2+(Y-b)^2=\frac{[2a(X+a)^2-2b(X+a)\cdot(Y-b)-p(Y-b)^2]^2}{(X+a)^2\cdot[(X+a)^2+(Y-b)^2]} \quad (80)$$

Па зьнішчэньні назоўніка находзім:

$$(X+a)^2\cdot[(X+a)^2+(Y-b)^2]^2=[2a(X+a)^2-2b(X+a)(Y-b)-$$
$$-p(Y-b)^2] \quad \dots\dots\dots (81)$$

Здабыўшы з абедзьвюх частак раўнаньня (81) квадратовы корань і ўзяўшы знак+у другой частцы (значэньне знаку—у яе будзе растлумачана ў канцы гэтага §), мы і палучым раўнаньне шуканай крывой у наступнай форме:

$$(X+a)\cdot[(X+a)^2+(Y-b)^2]-2a(X+a)^2+2b(X+a)\cdot(Y-b)+$$
$$+p(Y-b)^2=0 \quad \dots\dots\dots (82)$$

Гэта будзе раўнаньне крывой, утворанай пунктам $M(a,b)$, зьвязаным з параболай: $y^2=-2px$ на роўніцы нярухомай параболы $y^2=2px$. Раўнаньне (82) ясна паказвае, што мы палучылі *цыркулярную крывую 3-га парадку* з падвойным пунктам M_1 $(-a_1, b)$.

§ 9. Разуважым цяпер часныя выпадкі задачы:

I. Няхай $a=0$ і $b=0$, г. зн. „абразуючы“ пункт M супадае з вяршыняй параболы. Раўнаньне (82), як лёгка бачыць, прыме форму:

$$x(x^2+y^2)+py^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (83)$$

вядомае раўнаньне *цысоіды Дыоклэса.*

II. Няхай $a=\frac{p}{2}$; $b=0$. Абразуючы пункт M супадае з асновай дырэктрысы рухомай параболы. Раўнаньне (82) у гэтым выпадку будзе мець выгляд:

$$(x+\frac{p}{2})[(x+\frac{p}{2})^2+y^2]-p(x+\frac{p}{2})^2+py^2=0 \quad . \; . \; . \; (84)$$

альбо

$$(x+\frac{p}{2})[(x+\frac{p}{2})^2+y^2]-p[(x+\frac{p}{2})^2-y^2]=0 \quad . \; . \; (84a)$$

маем раўнаньне *простай строфоіды.*

Яе падвойны пункт: $(-\frac{p}{2}, 0)$ сымэтрычны з „абразуючым“ пунктам адносна восі OY.

Пасьля пераносу пачатку коордынат у падвойны пункт раўнаньне (84а) прыме выгляд:

$$x'\cdot(x'^2+y'^2)-p\cdot(x'^2-y'^2)=0 \quad . \; . \; . \; . \; (85)$$

[глядзі: гл. 2-я § 11].

III. Няхай $a=-\frac{p}{2}$; $b=0$, г. зн. „абразуючы“ пункт супадае з *фокусам* рухомай параболы. Раўнаньне (82) прыме форму:

$$(x-\frac{p}{2})[(x-\frac{p}{2})^2+y^2]+p(x-\frac{p}{2})^2+py^2+0 \; . \; . \; . \; (86)$$

альбо

$$(x+\frac{p}{2})\cdot[(x-\frac{p}{2})^2+y^2]=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (86a)$$

Крывая ў гэтым выпадку распадаецца на простую $x+\frac{p}{2}=0$—, *дырэктрысу* нярухомай параболы, і пункт $x=\frac{p}{2}$; $y=$

$=O$—*фокус* яе. Можна сказаць, што тут мы палучаем цыркулярную крывую з ізоляваным падвойным пунктам.

IV. Калі $a=O$ і b ня роўна нулю, г. зн. калі „абразуючы“ пункт M знаходзіцца на датычнай у вяршыні нярухомай параболы, то раўнаньне (82) прыме гэткі выгляд:

$$x[x^2+(y-b)^2]+2bx(y-b)+p(y-b)^2=O \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

Раўнаньне (87) можа спрасьціць, зрабіўшы ператварэньне каардынат па формулах:

$$x=x'$$
$$y=y'+b$$

Раўнаньне (87) у гэткім выпадку прыме больш просты выгляд:

$$x'(x'^2+y'^2)+2bx'y+py'^2=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

Крывая (87) альбо (88) завецца *офіурыдай Uhlhorn'a.*

Больш падрабязна аб ёй будзе сказана ў канцы гэтае главы.

Калі ў раўнаньні (88) палажыць і $b=O$, то офіурыда пяройдзе ў цысоіду Дыоклэса.

V. Калі $b=o$, а a ня роўна нулю, г. зн. калі „абразуючы“ пункт M ляжыць на галоўнай восі парабол, то раўнаньне (82) зьвяртаецца ў наступнае:

$$x(x^2+y^2)+ax^2-a^2x+(a+p) \cdot y^2-a^3=O \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

§ 10. Крывая (82) пасьля пераносу пачатку каардынат у падвойны пункт $M_1(-a, b)$ будзе мець сваім раўнаньнем наступнае:

$$x(x^2+y^2)-2ax^2+2bxy+py^2=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82a)$$

Крывая (82a) мае падвойны пункт *узлавы* ў тым выпадку, калі дыскрымінант:

$$-2a \cdot p-\frac{(2b)^2}{4} < O$$

[гл. I §§ 22 і 23]. другімі словамі, калі

$$b^2+2pa > O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90)$$

Бяручы пад увагу, што раўнаньне рухомай параболы $y^2+2px=O$, мы можам сказаць, што палучаная цыркулярная крывая мае *ўзлавы* пункт, калі „абразуючы“ пункт M ляжыць *знадворку* часткі роўніцы, абмежаванай рухомай параболай [1]).

[1]) Г. зн. у частцы роўніцы з боку *выпукласьці* рухомай параболы.

Калі

$$p^2+2ap < O,$$

то падвойны пункт крывой будзе *ізоляваны* (г. зн. у тым выпадку, калі „абразуючы“ пункт М ляжыць унутры рухомай параболы [1]),

Наканец, калі пункт М ляжыць на самой рухомай параболе, то падвойны пункт крывой будзе пунктам *узвароту*, і раўнаньне цыркулярнай крывой прыме выгляд:

$$(x+a)[(x+a)^2+(Y-b)^2]+[\sqrt{-2a}(x+a)-\sqrt{p}(Y-b)]^2=O \quad . (91)$$

пры гэтым $b^2+2pa=O$.

Урэшце маем гэткую агульную тэорэму:

Крывая, апісваемая пунктам М нязьменна зьвязаным з нейкай параболай: $y^2=-2px$ пры катаньні яе без скальжэньня па параболе: $y^2=2px$ будзе заўсёды цыркулярная крывая 3-га парадку з падвойным пунктам M_1—сымэтрычным з пунктам М адносна датычнай у вяршыні нярухомай параболы (восі OY). Падвойны пункт будзе вузлавы, калі М знадворку рухомай параболы. Калі пункт М на самой рухомай параболе—падвойны пункт крывой будзе пунктам узвароту. Наконец, пры выбары пункту М унутры рухомай параболы мы палучаем цыркулярную крывую з ізоляваным падвойным пунктам.

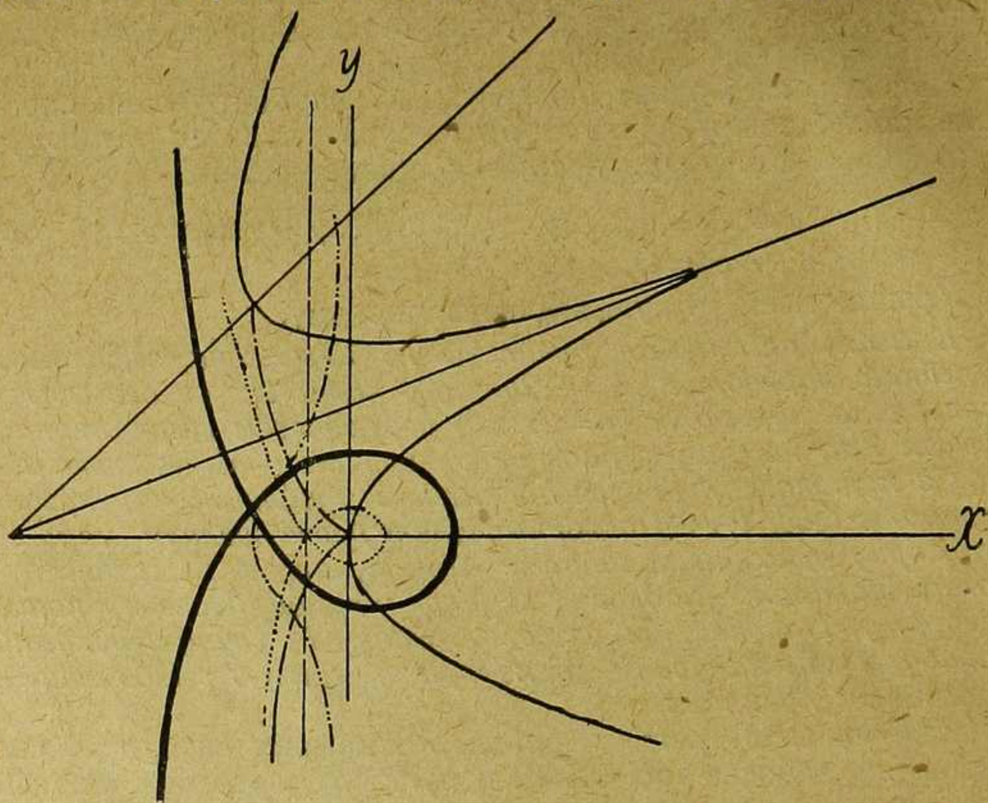
Калі пункт М узяты адвольна, то крывыя ня будуць сымэтрычны адносна восі OX. Калі пункт М узяты на галоўнай восі парабол, то палучаныя крывыя будуць сымэтрычны адносна OX, што лёгка ўгледзець з раўнаньня (89), якая не зьмяняецца пры замене ў ім у на—у.

Калі пункт М рушыцца па восі X зьлева направа, то петлі палучаемых строфоід усё зьмяншаюцца, пры супадзеньні пункту М. з вяршыняй рухомай параболы строфоіды пераходзяць у цысоіду. Пры далейшым руху пункту X бяскрайная галіна крывой аддзяляецца ад падвойнага пункту абяртаючыся выпукласьцю ўправа. Калі пункт М супадзе з фокусам рухомай параболы, бяскрайная галіна палучаемай крывой выпрамляецца ў дырэктысу нярухомай параболы.

Пры пераходзе пункту М улева за фокус рухомай параболы бяскрайная галіна крывой зноў выкрыўляецца зьвяртаючыся выпукласьцю ўлева (рыс. 67). Калі-б галоўныя восі парабол у пачатковы момант утваралі кут ня роўны π, то, напрыклад, пункт узвароту палучанай крывой (калі пункт М

[1]) Г. зн. у частцы роўніцы з боку *ўгнутасьці* рухомай параболы.

узяты на рухомай параболе) быў-бы не ў пачатку коордынат, а ў тым пункце нярухомай параболы, у якім да яе датычылася-б пры катаньні вяршыня рухомай параболы.



Рыс. 67.

Пры здабываньні квадратовага кораню з дзьвюх частак раўнаньня (81) намі вышэй быў узяты знак $+$ пры другой частцы раўнаньня.

Калі мы ўзялі пры ёй знак, то замест раўнаньня (82) палучылі-б наступнае:

$$(X+a)\,.\,[X+a)^2+(Y-b)^2]+2a(X+a)^2-2b(X+a)(Y-b)-$$
$$-p(Y-b)^2=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (92)$$

Для дасьледваньня раўнаньня (92) перанясем пачатак коордынат у пункт $M_1(-a,\, b)$—падвойны пункт крывой, пакідаючы восі паралельнымі старым. Тады раўнаньне (92) зробіцца такім:

$$x'\,.\,(x'^2+y'^2)+2ax'^2-2bx'y'-py'^2=O \quad . \; . \; . \quad (93)$$

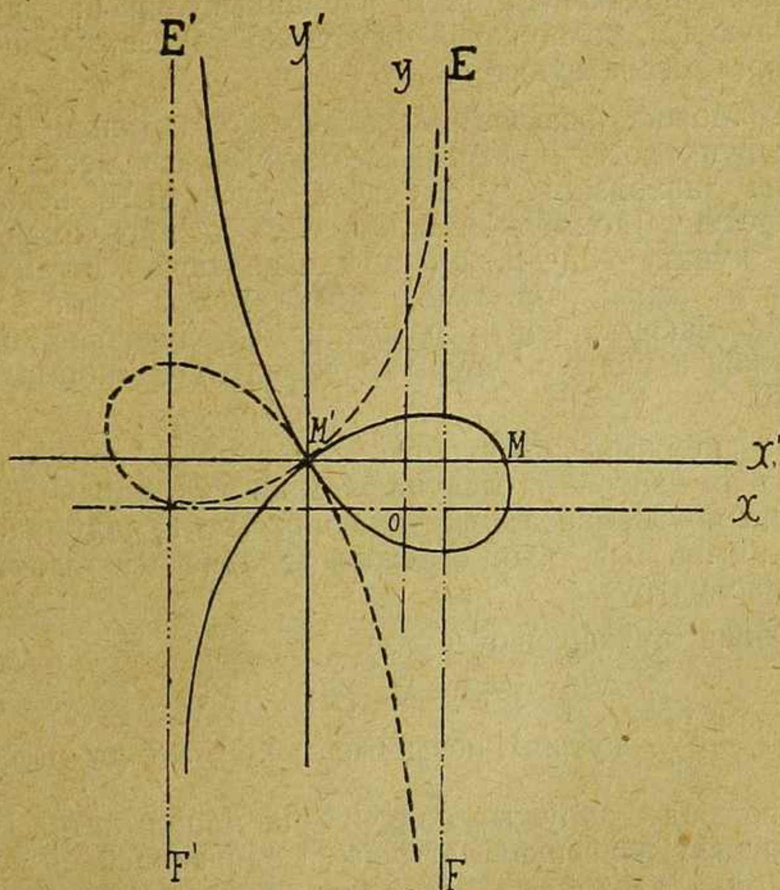
Раўнаньне-ж крывой (82) адносна тых-жа восяй будзе:

$$x'\,.\,(x'^2+y'^2)-2ax'^2+2bx'y'+py'^2=O \quad . \; . \; . \quad (94)$$

З параўнаньня раўнаньняў (93) і (94) мы бачым, што раўнаньне (93) можа быць палучана з раўнаньня (94) шляхам замены x^1 і y^1 на $-x^1$ і $-y^1$, г. зн., што крывая (93) будзе тая-ж крывая (94), але перавернутая дважды: спачатку адносна восі y^1, а потым адносна восі x^1. На рысунку (68) зроблена гэтае падвойнае перавяртаньне для часнага віду крывой, а іменна:

$$x(x^2+y^2)-4x^2+2xy+3y^2=0$$

Гэтая крывая нарысавана сплашной чорнай лініяй. Ператорная крывая нарысавана пунктырам. M^1 супольны іх падвойны пункт, EF і E^1F^1 іх сапраўдныя асымптоты.



Рыс. 68

Калі „абразуючы“ пункт M ляжыць у пачатку коордынат (супольнай вяршыні абедзьвюх парабол у пачатковы момант руху), то крывыя (94) і (93) пераходзяць у дзьве роўныя цысоіды, маючыя супольны пункт узвароту, але

абернутых вострыем адна ўправа, другая ўлева. Другая з іх палучаецца пры абяртаньні руху, калі парабола: $y^2=2px$ будзе каціцца па параболе $y^2=-2px$.

Гэты агульны разьвязак задачы аб катаньні парабол прыводзіцца тут здаецца ў першы раз [1]).

Цікава паставіць у сувязь гэту задачу з задачай § 24 гл. I-ай, разуважваючай цыркулярныя крывыя як подэры парабол.

З другога боку разьвязаная задача мае некаторыя суадносіны да задачы Dandêlin'а аб каустыках: калі з пункту крыніцы свету L апусьціць пэрпэндыкуляр LP на датычную да крывой і працягнуць гэты пэрпэндыкуляр на даўжыню PR, роўную LP, то шуканай каустыкай будзе эволюта геомэтрычнага месца пункту R.

§ 11. Можна разьвязаць задачу аб катаньні парабол і інакш: пункты N_1 шуканага геомэтрычнага месца будуць відавочна знаходзіцца ў злучэчьні луча M_1N_1 некаторага пучка простых [нормаляй да датычных да нярухомай параболы з пункту $M_1(-a, b)$] з адпавядаючай гэтаму лучу акружынай сэрыі акружын, праходзячых праз той-жа пункт M_1, маючых цэнтр у пункце C злучэньня нормалі з датычнай, а радыус, роўны даўжыні M_1C—нормалі (Рысунак 66).

Гэтыя акружыны ня ўтвораць, зразумела, параболічнага пучка, бо іх цэнтры ня будуць ляжаць на аднэй простай. Адпаведнымі элемэнтамі пучка простых і раду акружын будзем лічыць тыя, якія залежны ад аднаго і таго-ж значэньня парамэтру λ.

Раўнаньне пучка лучоў будзе:

$$y-b=\lambda(x+a) \quad . \; , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (95)$$

дзе $\lambda=-\frac{y_1}{p}$—кутавы коэфіцыент нормалі да параболы.

Раўнаньне раду акружын палучым па координатах іх цэнтру C (пункту злучэньня датычнай і адпаведнай ёй нормалі да нярухомай параболы), і радыусу, роўнаму даўжыні нормалі M_1C.

---

[1]) Mirman L. у сваім артыкуле: Sur la cissoide Dioclès" Nouv. Ann. (3) IV разважае цысоіду, як геомэтр. месца пунктаў сымэтрычных з вяршыняй параболы адносна яе датычнай, г. зн. вельмі часны выпадак гэтай задачы.

Раўнаньне датычнай да параболы ў пункце $x_1 y_1$:

$yy_1 = p(x + x_1)$; раўнаньне нормалі $y - b = \lambda(x + a)$; $\lambda = -\frac{y_1}{p}$;

$y_1 = -p\lambda$; $x_1 = \frac{p\lambda^2}{2}$

Раўнаньні датычнай і нормалі праз парамэтр λ вызначаюцца так:

$$\begin{aligned} &2px + 2p\lambda y + p^2\lambda^2 = 0 \\ &\lambda x - y + a\lambda + b = 0 \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (96)$$

З сыстэмы (96) мы і знойдзем коордынаты центру C акружыны:

$$x_c = -\frac{\lambda(p\lambda + 2a\lambda + 2b)}{2(1+\lambda^2)}$$

$$y_c = \frac{2a\lambda + 2b - p\lambda^3}{2(1+\lambda^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (97)$$

Раўнаньне акружыны з цэнтрам у пункце C і радыусам M_1C будзе:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = M_1C^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (98)$$

Гэтая акружына павінна прайсьці праз пункт $M_1(-a, b)$, значыцца, мы маем умову:

$$(x_c + a)^2 + (y_c - b)^2 = M_1C^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (99)$$

і раўнаньне (98) можа быць перапісана гэтак:

$$x^2 - 2x_c x + x_c^2 + y^2 - 2y_c y + y_c^2 = x_c^2 + 2ax_c + a^2 + y_c^2 - $$
$$- 2by_c + b^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (100)$$

Раўнаньне (100) шляхам прыбаўленьня да абедзьвюх яго частак па $a^2 + b^2 + 2ax - 2by$ можа быць перапісана так:

$$(x+a)^2 + (y-b)^2 = 2(x+a)(x_c+a) + 2(y-b)(y_c-b) \quad . \quad (101)$$

Але:

$$x_c + a = \frac{2a - 2b\lambda - p\lambda^2}{2(1+\lambda^2)}$$

$$y_c - b = \frac{\lambda(2a - 2b\lambda - p\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)} \quad \ldots\ldots \quad (102)$$

Пасля падстаноўкі выразаў (102) у раўнаньне (101) мы палучым:

$$(1+\lambda^2)[(x+a)^2 + (y-b)^2] = (2a - 2b\lambda - p\lambda^2)[(x+a) + $$
$$+ \lambda(y-b)] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (103)$$

Для палучэньня шуканай крывой трэба, як сказана вышэй, выключыць парамэтр λ з сыстэмы (95) і (103).

Па выключэньні лёгка знаходзім:

$$(x+a)\,.\,[(x+a)^2+(y-b)^2]^2=[(x+a)^2+(y-b)^2]\,.\,[2a(x+a)^2-$$
$$-2b(x+a)\,.\,(y-b)-p(y-b)^2\,.\,] \quad . \; . \; . \; . \; (104)$$

Раўнаньне (104) распадаецца на

$$(x+a)^2+(y-b)^2=O \qquad (105a)$$

$$\text{і } (x+a)[(x+a)^2+(y-b)^2]-2a(x+a)^2+2b(x+a)(y-b)+$$
$$+p(y-b)^2=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (105)$$

(105a) вызначае пункт M_1 ($-a$, b), а (105) ёсьць нішто іншае, як раўнаньне (82) § 8 гэтай главы.

§ 12. Цыркулярная крывая 3 парадку можа быць палучана як геомэтрычнае месца пунктаў злучэньня дзьвюх простых, якія верцяцца навакол двох цэнтраў з кутавымі хуткасьцямі, знаходзячыміся ў стасунку 1 : 2. У наступным § разьвяжам і дасьледуем падрабязна гэтую задачу з тэй прычыны, што спосаб утварэньня цыркулярных крывых, які на ёй базуецца, часта сустракаецца ў больш-менш скрытым відзе ў радзе пабудаваньняў цыркулярных крывых, прапануемых рознымі аўтарамі.

Рыс. 69.

У першы раз ідэя гэтага способу, здаецца, сустракаецца ў Plateux, які ў сваёй заметцы, зьмешчанай у Correspond. Mathem. 4 1828 an, p. 393, упамінае аб магчымасьці палучэньня раду крывых, як геомэтрычнага месца пунктаў злучэньня дзьвюх простых, якія верцяцца з рознымі хуткасьцямі навакол двох нярухомых цэнтраў і дадае (бяз усякага паміж іншым доваду), што пры стасунку кутовых

хуткасьцяй 1 : 2 палучаецца пры гэтым цыркулярная крывая 3-га парадку [1]).

Ітак дапусьцім, што дзьве простыя OM і NM верцяцца навакол нярухомых цэнтраў O і N.

Возьмем (рысунак 69) простую ON за вось X простакутнай Дэк. сыстэмы коордынат, а пункт O за пачатак коордынат. Кут, утвораны простай OM з восьсю X няхай будзе ωt, а кут, утвораны лучом ON з тэй-ж восьсю $2\omega t+\alpha$ ω—кутавая хуткасьць вярчэньня простых, t—час, α—сталая колькасьць.

Тагды раўнаньне OM будзе:

$$y=tg(\omega t).x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (106)$$

а раўнаньне NM:

$$y=tg(2\omega t+\alpha).(x-a), \text{ дзе } a\text{—абсцыса пункту } N \quad . \quad (107)$$

Апошняе раўнаньне можна перапісаць гэткім чынам:

$$y=\frac{tg(2\omega t)+tg\alpha}{1-tg(2\omega t).tg\alpha}.(x-a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

Азначыўшы $tg(\omega t)$ праз k, а $tg\alpha$ праз l, раўнаньне (108) можна перапісаць так:

$$y=\frac{\frac{2k}{1-k^2}+l}{1-\frac{2kl}{1-k^2}}.(x-a), \text{ альбо } y=\frac{2k+l-lk^2}{1-k^2-2kl}(x-a) \quad . \quad (109)$$

Для палучэньня раўнаньня шуканага геомэтрычнага месца трэба выключыць зьменны парамэтр k з раўнаньняў (109) і (106) $y=kx$.

З (106) : $k=\frac{y}{x}$, значыцца

$$y=\frac{2\frac{y}{x}+l-l\frac{y^2}{x^2}}{1-\frac{y^2}{x^2}-\frac{2yl}{x}}.(x-a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

Раўнаньне (110) па спрашчэньні можна перапісаць так:

$$y=\frac{2xy+lx^2-ly^2}{x^2-y^2-2lxy}.(x-a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (111)$$

---

[1]) Аб гэтым-жа ўпамінаецца ў заметках Le Francois Corres. Math (5) 1829, p. 379 і van Rees Corres. Mathem. (5) 1829 p. 361.

альбо:

$$y(x^2-y^2-2lxy)=(2xy+lx^2-ly^2).(x-a) \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

Па раскрыцьці дужак палучаем:

$$yx^2-y^3-2lxy^2=2x^2y+lx^3-lxy^2-2axy-alx^2+aly^2 \quad . \quad (113)$$

Па спрашчэньні раўнаньня (113) яму можна прыдаць гэткі выгляд:

$$(lx+y).(x^2+y^2)-2axy-al(x^2-y^2=O \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

Гэта *цыркулярная крывая 3-га парадку з падвойным пунктам у O—пачатку каордынат.*

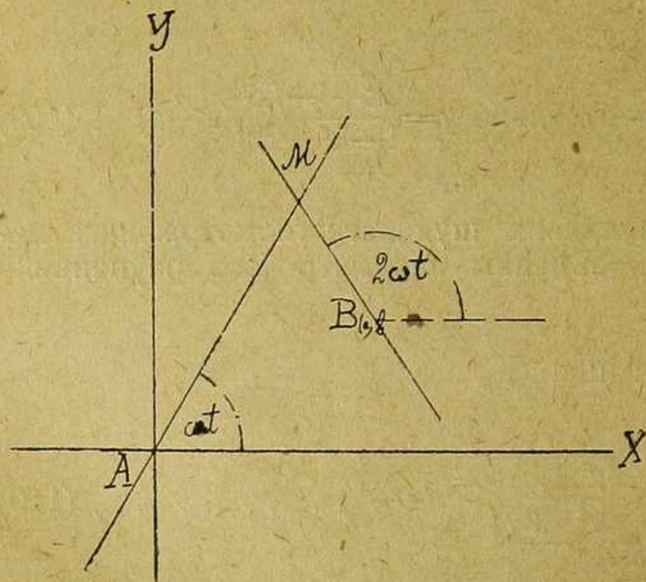
Яе сапраўдная асымптота нахілена да восі X пад кутом α, бо $l=tg\alpha$. Калі $l=O$, то раўнаньне (114) прымае выгляд:

$$y(x^2+y^2)-2axy=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

альбо

$$y(x^2+y^2-2ax)=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (116)$$

Крывая ў гэтым выпадку распадаецца на вось X і акружыну радыусу a, датычную да восі Y у пачатку каордынат. Апошняе ясна і з рысунку (69), так як трыкутнік ONM заўсёды роўнаплечы.



Рыс. 70.

Задача можа быць разьвязана і пры дапамозе гаткай сыстэмы раўнаньняў (рыс. 70).

Возьмем пачатак каордынат у пункце O, але вось X направім адвольна. Каорд. другога цэнтру B няхай будуць: (a, b). Тады раўнаньне AM будзе, як ня цяжка бачыць з рысунку 70.

$$y=tg(\omega t).x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

а раўнаньне BM:

$$y-b=tg(2\omega t)(x-a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (118)$$

Абазначыўшы па стараму $tg(\omega t)$ праз k, палучым гэткую сыстэму раўнаньняў для выключэньня k:

$$y=kx \quad i \quad y-b=\frac{2k}{1-k^2}(x-a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (119)$$

Выключыўшы k з сыстэмы (119), лёгка палучым:

$$y(x^2+y^2)+b(x^2-y^2)-2axy=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (120)$$

Цыркулярную крывую 3 парадку з падвойным пунктам у пачатку коордынат.

Для высьвятленьня роду палучанай крывой зробім над яе раўнаньнем інвэрзійнае пературарэньне па формулах

$$x=\frac{m^2x'}{x'^2+y'^2};\ y=\frac{m^2y'}{x'^2+y'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (121)$$

Пасьля падстаноўкі палучым:

$$\frac{m'^2 . y'}{x'^2+y'^2} . \left[\frac{m^4}{x'^2+y'^2}\right]+\frac{b . m^4(x'^2-y'^2)}{(x'^2+y'^2)^2}-\frac{2am^4x' . y'}{(x'^2+y'^2)^2}=O \quad . \quad . \quad (122)$$

альбо, па скарачэньні:

$$m^2 . y'+bx'^2-b . y'^2-2ax' . y'=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123)$$

Раўнаньне (123) прадстаўляе роўнабочную гіпэрболу, значыцца, крывая (120) ёсьць *строфоіда* (§ 10, гл. I. стар. 72).

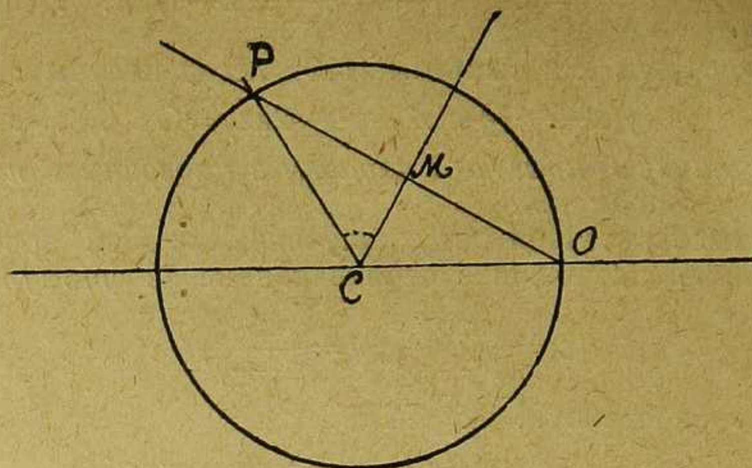
Адсюль маем гэткую тэорэму:

Калі дзьве простыя будуць вярцецца навокал двох пунктаў роўніцы A і B так, што стасунак іх кутавых хуткасьцяй роўны 1 : 2 і калі ў пачаткованы момант (пры $t=O$) абедзьве простыя не супадаюць адна з другой, то геомэтрычным месцам пунктаў злучэньня гэтых простых, будзе некаторая цыркулярная крывая 3 парадку (строфоіда), праходзячая праз пункты A і B. Адзін з гэтых пунктаў (праз які праходзіць луч з меншай кутовай хуткасьцю) будзе падвойным пунктам шуканай крывой, другі яе паасобным фокусам.

Калі простыя A M і BM пры $t=O$ супадаюць, то крывая распадаецца на простую і акружыну.

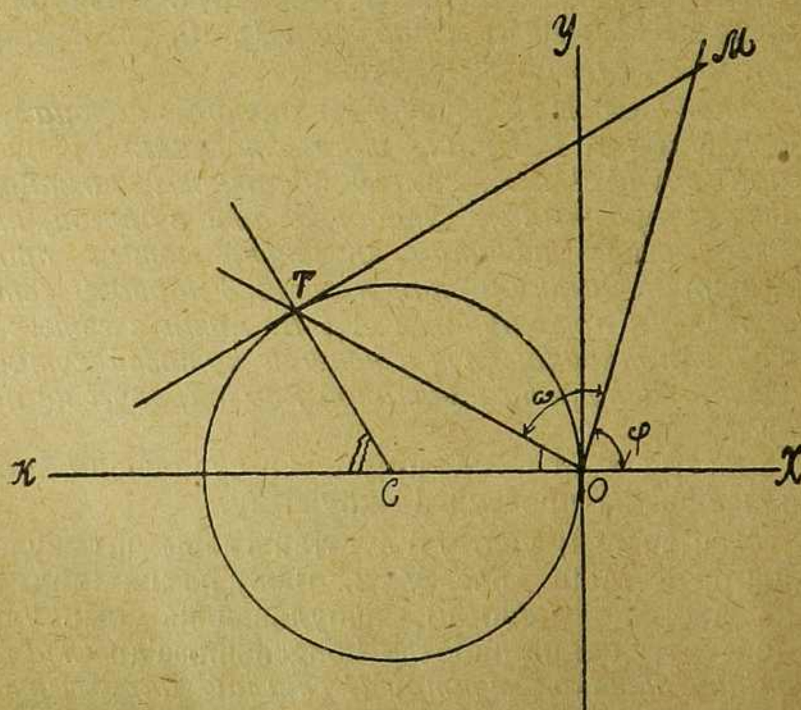
§ 13. У памянёным ужо ў § 4 гэтай главы артыкуле Jean Cyane (Journ. de Math. spéc. V, 2, 1893) паміж іншым прапануецца наступны спосаб пабудаваньня цыркулярных крывых (ён базуецца на работах Longshampsa'a). *Сталы кут PCM верціцца навакол цэнтру C сталай акружыны і бок яго PC злучаецца з акружынай у пункце P. Злучаем пункт P са сталым пунктам O, узятым на акружыне*

і разгледзім пункт М злучэньня гэтай простай з другім бокам СМ сталага кута. Месца пункту М будзе строфоіда.



Рыс. 71.

Калі даны пункт просты, то строфоіда будзе простай і сымэтрычнай адносна радыусу ОС. З азначэньня (рыс. 71)



Рыс. 72.

вынікае, што кутавая хуткасьць радыусу СР (а зн. і нязьменна з ім зьвязанага СМ) у два разы больш іх кутавая хуткасьць вэктару ОМ. Гэта значыцца, што пабудаваньні Суапе'а няпасрэдна вынікаюць з папярэдняй задачы.

Да задачы аб вярчэньні дзьвюх простых з кутавымі хуткасьцямі ў стасунку 1 : 2 мае некаторыя суадносіны і такая задача аб пабудаваньні цысоід, прыведзеная ў тым-жа артыкуле Суапе'а:

Няхай дана акружына з цэнтрам С і сталы пункт О на гэтай акружыне (рысун. 72). Разгледзім рухомую датычную ТМ і сталы кут ТОМ, які верціцца навакол сваёй вяршыні О такім чынам, што адзін з яго бакоў ОТ праходзіць заўсёды праз пункт дотыку Т рухомай датычнай. Пункт М злучэньня яго другога боку з датычнай апісвае *цысоіду*.

Цысоіда будзе простай, калі сталы кут роўны 90^0. У гэтым руху кутавая хуткасьць рухомай датычнай таксама ў два разы больш за хуткасьць радыусу вэктару ОМ.

Возьмем пункт О за пачатак простак. Дэкар. сыстэмы каардынат. Радыус акружыны азначым праз а. Коорд. яе цэнтру будуць (—а, О).

Каардынаты пункту Т азначым праз $(x_1\ y_1)$.

Раўнаньне акружыны С будзе:

$$x^2+y^2+2ax=O \quad \ldots\ldots\ldots \quad (124)$$

Раўнаньне простай ОМ

$$y=tg\varphi . x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (125)$$

Раўнаньне датычнай да акружыны ТМ:

$$xx_1+yy_1+ax+ax_1=O \quad \ldots\ldots \quad (126)$$

Раўнаньне простай ОТ:

$$y=tg(\omega+\varphi) . x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (127)$$

Для палучэньня шуканага геомэтр. месца пункту М трэба выключыць з сыстэмы раўнаньняў:

$$xx_1+yy_1+ax+ax_1=O \quad \ldots\ldots \quad (128)$$
$$y=tg\varphi . x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (129)$$
$$y_1=tg(\omega+\varphi) . x_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (130)$$
$$x_1^2+y_1^2+2ax_1=O \quad \ldots\ldots\ldots \quad (131)$$

выключыць $x_1\ y_1$ і φ.

Раўнаньне (128) можна перапісаць такім чынам:

$$x+y . \frac{y_1}{x_1}+\frac{ax}{x_1}+a=O \quad \ldots\ldots \quad (128a)$$

З (130) маем:

$$\operatorname{tg}(\omega+\varphi)=\frac{y_1}{x_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (130a)$$

З (131) знаходзім:

$$1+\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2+\frac{2a}{x_1}=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; (131a)$$

Адсюль

$$x_1=-\frac{2a}{1+\operatorname{tg}^2(\omega+\varphi)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (132)$$

Пасьля падстаноўкі ў (128а) выразаў: x_1 з (182) і $\frac{y_1}{x_1}$ з (130а) мы палучым:

$$x+y\,.\operatorname{tg}(\omega+\varphi)-\frac{ax\,.\,[1+\operatorname{tg}^2(\omega+\varphi)]}{2a}+a=O \quad . \; . \; 133)$$

альбо

$$2x+2y\,.\operatorname{tg}(\omega+\varphi)-x\,.\,[1+\operatorname{tg}^2(\omega+\varphi)]+2a=O \; . \; . \; (134)$$

Па злучэньні падобных членаў:

$$x[1-\operatorname{tg}^2(\omega+\varphi)]+2y\operatorname{tg}(\omega+\varphi)+2a=O \quad . \; . \; . \; (135)$$

Але $$\operatorname{tg}(\omega+\varphi)=\frac{\operatorname{tg}\omega+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\omega\,.\operatorname{tg}\varphi}=\frac{k+\frac{y}{x}}{1-\frac{ky}{x}}=\frac{kx+y}{x-ky} \quad . \; . \; (136)$$

дзе $k=\operatorname{tg}\omega$.

Падставіўшы $\operatorname{tg}(\omega+\varphi)$ з (136) у (135), знойдзем:

$$x\left[1-\frac{k^2x^2+2kxy+y^2}{x^2-2kxy+k^2y^2}\right]+2y\,.\frac{kx+y}{x-ky}+2a=O \; . \; . \; (137)$$

Зьнішчым назоўнік:

$$x[x^2-2kxy+k^2y^2-k^2x^2-2kxy-y^2]+2y(kx+y)(x-ky)+$$
$$+2a(x-ky)^2=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (138)$$

Па раскрыцьці дужак знаходзім:

$$x^3-4kx^2y+k^2xy^2-k^2x^3-xy^2+2kx^2y+2xy^2-2k^2xy^2-2ky^3+$$
$$+2a(x-ky)^2=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (139)$$

Па злучэньні падобных членаў палучаем:

$$\underline{x^3}-\underline{\underline{2kx^2y}}-\underline{k^2xy^2}-\underline{k^2x^3}+\underline{xy^2}-\underline{\underline{2ky^3}}+2a(x-ky)^2=O \; . \; (140)$$

Групуючы падкрэсьленыя члены (140), мы можам перапісаць яго так:

$$x(x^2+y^2)-2ky\,.\,(x^2+y^2)-k^2x(x^2+y^2)+2a(x-ky)^2=O \; . \; (141)$$

Раўнаньню (141) можна даць гэткі выгляд:

$$(x-2ky-k^2x)(x^2+y^2)+2a(x-ky)^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad (142)$$

альбо

$$[(1-k^2)x-2ky]\,.\,(x^2+y^2)+2a(x-ky)^2=0 \quad . \quad . \quad (143)$$

Раўнаньне (143) ёсьць раўнаньне *цыркулярнай крывой з падвойным пунктам (узвароту) у пачатку коордынат.* (Гл. I. § 23). Лёгка паказаць, што інвэрзійнымператварэньнем (143) будзе парабола:

$$2a(x-ky)^2+(1-k^2)\,.\,l\,.\,x^2-2kl^2y=0 \quad . \quad . \quad . \quad (144)$$

где l—модуль інвэрзіі. Значкі $'$ у коордынат апушчаны. Крывая (143) будзе стала быць *косаю цысоідай.*

Калі $\omega=\frac{\pi}{2}$, то $k=\infty$.

Разьдзяліўшы на k^2 абедзьве часткі раўнаньня (143), мы палучаем

$$\left[\left(\frac{1}{k^2}-1\right)x-\frac{2y}{k}\right].\,(x^2+y^2)+2a\left(\frac{x}{k}-y\right)^2=0 \quad . \quad . \quad (145)$$

Палажыўшы ў раўнаньні (145) $k=\infty$, прывядзем яго да выгляду:

$$x(x^2+y^2)-2ay^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (146)$$

г. зн. мы палучылі *цысоіду Дыоклэса.*

Кутавая хуткасьць рухомай датычнай ТМ роўна кутовай хуткасьці вэктару СТ, а кутавая хуткасьць вэктару ОМ роўна кутовай хуткасьці ОТ. З трыкутніка СОТ маем, што

$$\text{кут ТОС}=\frac{1}{2}\text{кута ТСК}.$$

Другі луч тут, аднак, ня сам верціцца навокал нярухомага цэнтру (С), а толькі нязьменна зьвязаны з простай, якая верціцца навокал С.

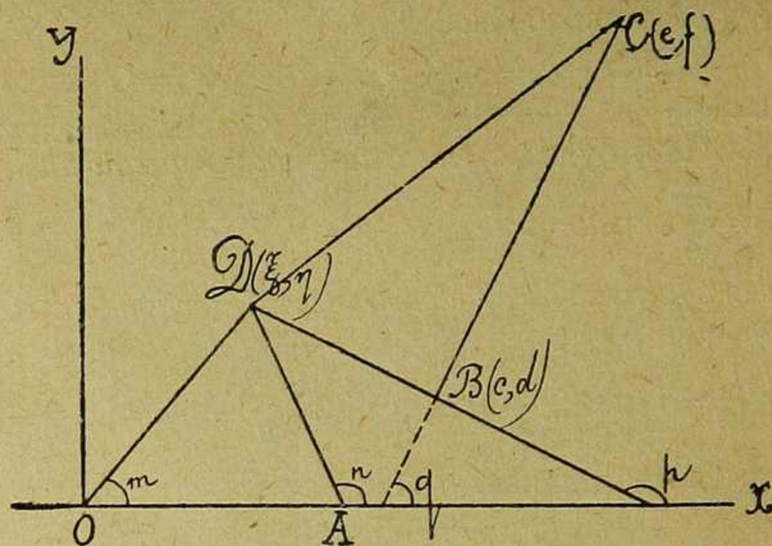
Заўвага: Цыркулярная крывая з пунктам узвароту таксама можа быць палучана як геометрычнае месца пунктаў злучэньня дзьвюх простых, якія верцяцца навокал двох нерухомых цэнтраў, але суадносіны паміж іх кутавымі хуткасьцямі будуць больш складанымі. Напр., каб палучыць такім чынам цысоіду Дыоклэса трэба, каб паміж кут. хуткасьцямі ω_1 і ω існавала сувязь:

$$tg(\omega_1 t)=\frac{2\,.\,[tg(\omega t)]^3}{1+3\,.\,[tg(\omega t)]^2}.$$

§ 14. Разуважым у заключэньне главы яшчэ некаторыя способы палучэньня цыркул. крывых як геомэтрычных месц.

Месца супольнай вяршыні двох трыкутнікаў, у якіх асновы даны і ў якіх роўныя куты пры вяршыні ёсьць цыркулярная крывая 3 парадку, праходячая праз супольную вяршыню і канцы абедзьвюх асноў трыкутнікаў.

Задача гэтая ў бібліографіі цыркулярных крывых сустракаецца шэсьць разоў. Як паказаў Schoute ў артыкуле



Рыс. 73

ў Crelle Journ. Bd. 99., у першы раз гэта задача прыводзіцца ў Magnus'а ў 1833 годзе. Артыкул Schoute напісаны ў адказ на артыкул Hermes'а ў тым-жа Crelle Journ. Bd. 97. Schoute паказвае, што гэтая задача сустракаецца і ў Steiner'а і што вынікі Hermes могуць быць палучаны і сынтэтычным мэтодам на падставе работ H. Kuppera, C. Pelz'а і H. Schröter'а, пры тым у больш агульнай форме. Незалежна ад указаных аўтараў гэтай задачай у яе часным відзе займаўся A van Uven (Quelques remarques sur la strophoide oblique, Archives du Musée Taulor (2) 8.

Аб ёй-жа памінае і Casey (бяз довадаў) у яго цытаванай вышэй працы: „On Bicircular Quartics".

Укажам тут агульнае аналітычнае разьвязаньне пастаўленай задачы (у гэткай форме яно не сустракаецца ў літаратуры пытаньня). Возьмем вяршыню аднаго з трыкутнікаў (рысунак 73) за пачатак Дэкартавай простакутнай сыстэмы координат, а яго аснову роўную а за вось X. Тады коор-

дынаты пункту O будуць (0,0), пункту A (a,0) пункту B (c,d) пункту C (e, f). Координаты пункту геомэтрычнага месца D азначым праз (ξ, η).

Па ўмове кут ODA роўны куту BDC.

Няхай далей кутавыя коэфіцыэнты простых OD; DA DB і DC будуць адпаведна m, n, p і q.

Тады раўнаньні гэтых простых напішуцца так:

$$OD : \eta = m\xi \quad \ldots \ldots \quad (147)$$

$$DA : \eta = n(\xi - a) \quad \ldots \ldots \quad (148)$$

$$DB : \eta - d = p(\xi + c) \quad \ldots \ldots \quad (149)$$

$$DC : \eta - f = q(\xi - c) \quad \ldots \ldots \quad (150)$$

Далей, tg кута паміж DB і DC будзе $\frac{q-p}{1+pq}$

а tg кута паміж OD і DA будзе: $\frac{m-n}{1+mn}$

Па ўмове

$$\frac{m-n}{1+mn} = \frac{q-p}{1+q \cdot p} \quad \ldots \ldots \quad (151)$$

Для палучэньня раўнаньня шуканага геомэтрычнага месца застаецца выключыць зьменныя m, n, p і q з пяці палучаных раўнаньняў:

$$m = \frac{\eta}{\xi}; \; n = \frac{\eta}{\xi - a}; \; p = \frac{\eta - d}{\xi - c}; \; q = \frac{\eta - f}{\xi - e} \quad \ldots \quad (152)$$

і (151). Падставіўшы выразы m, n, p і q у (151), палучаем:

$$\frac{\frac{\eta}{\xi} - \frac{\eta}{\xi - a}}{1 + \frac{\eta^2}{\xi(\xi - a)}} = \frac{\frac{\eta - f}{\xi - e} - \frac{\eta - d}{\xi - c}}{1 + \frac{(\eta - d)(\eta - f.)}{(\xi - c).(\xi - e)}} \quad \ldots \quad (153)$$

альбо:

$$\frac{\eta(\xi - a) - \xi\eta}{\xi(\xi - a) + \eta^2} = \frac{(\eta - f).(\xi - c) - (\eta - d)(\xi - e)}{(\xi - c)(\xi - e) + (\eta - d)(\eta - f)} \quad \ldots \quad (154)$$

Раскрыем дужкі:

$$\frac{-a\eta}{\xi^2 + \eta^2 - a\xi} = \frac{(d - f).\xi + (e - c)\eta + cf - de}{\xi^2 + \eta^2 - (c + e)\xi - (d + f)\eta + df + ce} \quad \ldots \quad (155)$$

Зьнішчаем назоўнікаў:

$$-a\eta(\xi^2+\eta^2)+a(c+e)\xi\eta+a(d+f)\eta^2-adf\,.\,\eta-ace\eta=[(d-f).\,\xi+$$
$$+(e-c)\eta+cf-de]\xi^2+\eta^2)-a(d-f)\xi^2-a(e-c)\xi\eta-acf\xi+$$
$$+ade\xi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (156)$$

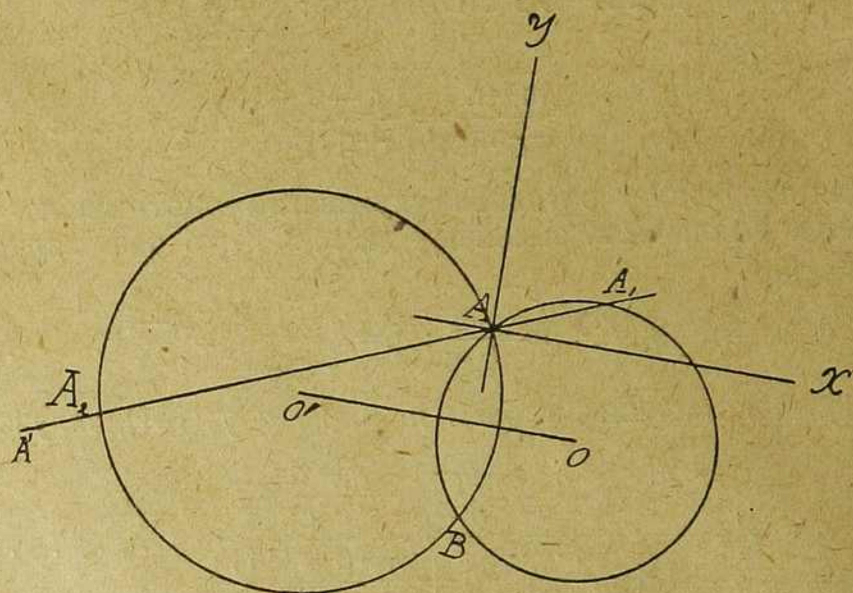
Раўнаньне (156) можа быць перапісана ў такой форме:

$$[(d-f)\xi+(e+a-c)\eta+(cf-de)](\xi^2+\eta^2)-a(d-f)\xi^2-2ae\xi\eta-$$
$$a(d+f)\eta^2-a(cf+de)\xi+a(af+ce)\eta=O \quad . \; . \; . \quad (157)$$

Раўнаньне (157) прадстаўляе *цыркулярную крывую,* праходзячую праз пачатак координат. Гэтая-ж крывая, як лёгка ўпэўніцца, праходзіць і праз пункты A, B і C.

§ 15. Cl. Servais у артыкуле Sur les cubiques nodales circulaires (Nouv. Ann. (3) VIII (197—203) прапануе наступны спосаб пабудаваньня цыркулярных крывых:

Калі праз пункт злучэньня A дзьвюх акружын правесьці ўсе магчымыя сякучыя, якія злучаюцца з гэтымі акружы-



Рыс. 74.

намі, у пунктах A_1 і A_2, то геомэтрычным месцам пункту M^1 чацьвертага гармонічнагэ да пунктаў A_1 A_2 і A будзе некаторая цыркулярная крывая 3-га парадку, маючая падвойны пункт у пункце A.

Возьмем пункт A (рыс. 74) за пачатак простак. Дэк. сыстэмы координат. Вось OX возьмем паралельна лініі цэнтраў абедзьвюх акружын.

Кoордынаты цэнтру акружыны O няхай будуць $(a,-b)$
Кoордынаты цэнтру акружыны O^1 няхай будуць $(-c,-b)$
Тады раўнаньне першай акружыны будзе:

$$(x-a)^2+(y+b)^2=a^2+b^2$$

альбо

$$x^2+y^2-2ax+2by=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (158)$$

Раўнаньне другой акружыны O^1 будзе:

$$(x+c^2+(y+b)^2=c^2+b^2$$

альбо

$$x^2+y^2+2cx+2by=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (159)$$

Раўнаньне простай A_1 A_2:

$$y=\lambda x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (160)$$

Знойдзем на простай A_1 A_2 координаты пункту A'— чацьвертага гармонічнага з A_1, A_2 і A:

Координаты пункту A_1 знойдуцца з сыстэмы (158) і (160)

$$x^2+\lambda^2x^2-2ax+2b\lambda x=O; \; x^2(1+\lambda^2)=2(a-b\lambda) \,.\, x$$

Координаты пункту

$$A_1\left[\frac{2(a-b\lambda)}{1+\lambda^2}, \frac{2\lambda(a-b\lambda)}{1+\lambda^2}\right]$$

Координаты пункту A_2 знойдзем з сыстэмы (159) і (160)

$$x^2+\lambda^2x^2+2cx+2b\lambda x=O; \; x^2(1+\lambda^2)=-2(c+b\lambda) \,.\, x$$

Координаты пункту

$$A_2\left[-\frac{2\,.\,(c+b\lambda)}{1+\lambda^2}, -\frac{2\lambda\,.\,(c+b\lambda)}{1+\lambda^2}\right]$$

Координаты пункту

$$A\,[O,\, O]$$

Координаты пункту A' азначым праз ξ і η.

$$A'\,[\xi,\, \eta]$$

Калі пункт A' чацьверты гармонічны да пунктаў A_1 A_2 і A, то

$$(A_1 \; A_2 \; A \; A')=-1 \text{ альбо } \frac{A_1 \; A}{A_2 \; A}:\frac{A_1 \; A'}{A_2 \; A'}=-1 \quad . \quad . \quad (161)$$

Так як ангармонічны стасунак не зьмяняецца пры проектаваньні, то возьмем проекцыю адрэзкаў, уваходзячых у (161) на вось OX:

$$\left[-\frac{2(a-b\lambda)}{1+\lambda^2}:\frac{2(c+b\lambda)}{1+\lambda^2}\right]:\left\{\left[\xi-\frac{2(a-b\lambda)}{1+\lambda^2}\right]:\left[\xi+\frac{2(c+b\lambda)}{1+\lambda^2}\right]\right\}=-1$$

альбо па скарачэньні:

$$-\frac{a-b\lambda}{c+b\lambda}:\frac{\xi(1+\lambda^2)-2(a-b\lambda)}{\xi(1+\lambda^2)+2(c+b\lambda)}=-1 \quad . \quad . \quad . \quad (162)$$

Пасьля некаторых спрашчэньняў палучаем:

$$(a-b\lambda)[\xi(1+\lambda^2)+2(c+b\lambda)]=(c+b\lambda)[\xi(1+\lambda^2)-2(a-b\lambda)]$$

альбо

$$\xi(1+\lambda^2).[(a-c)-2b\lambda]+4(a-b\lambda)(c+b\lambda)=O \quad . \quad . \quad (163)$$

Для палучэньня шуканага геомэтрычнага месца трэба выключыць парамэтр λ з (163) пры дапамозе суадносін:

$$\eta=\lambda\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (164)$$

Пасьля падстаноўкі ў (163) выразу λ з (164) маем:

$$\frac{\xi(\xi^2+\eta^2)}{\xi^2}\left[(a-c)-\frac{2b\eta}{\xi}\right]+4\left(a-\frac{b\eta}{\xi}\right)\left(c+\frac{b\eta}{\xi}\right)=O$$

альбо

$$[(a-c)\xi-2b\eta].(\xi^2+\eta^2)+4ac\xi^2+4b(a-c).\xi\eta-b^2\eta^2=O \quad . \quad (165)$$

Палучылі *цыркулярную крывую з падвойным пунктам у* A.

Другое разьвязаньне.

Коордынаты (X, Y) пункту чацьвертага гармонічнага да трох дадзеных пунктаў (O, O), (x_1 y_1) і (x_2 y_2) выражаюцца, як вядома, формуламі:

$$X=\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2};\ Y=\frac{2y_1 . y_2}{y_1+y_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (166)$$

Дапасаваўшы формулы (166) да коордынат пунктаў A_1, A_2, A і A′ (стар. 202), мы палучым для коордынат пункту A′ гэткія выразы.

$$\xi=-\frac{8(a-b\lambda)(c+b\lambda)}{2(1+\lambda^2).[a-c)-2b\lambda]};\ \eta=-\frac{8\lambda(a-b)(c+b\lambda)}{2(1+\lambda^2)[(a-c)-2b\lambda]} \quad . \quad (167)$$

Для получэньня шуканага геомэтрычнага месца трэба выключыць λ з систэмы (167). Падзяліўшы другое з раўнаньняў (167) на першае, палучаем:

$$\frac{\eta}{\xi}=\lambda$$

Падставіўшы гэты выраз λ зноў у першае раўнаньне сыстэмы (167), знойдзем:

$$\xi=-\frac{4(a\xi-b\eta).(c\xi+b\eta)}{\frac{\xi^2.(\xi^2+\eta^2)}{\xi^2}.\left[\frac{(a-c)\xi-2b\eta}{\xi}\right]}$$

Пасьля скарачэньня

$$1=\frac{-4(a\xi-b\eta).(c\xi+b\eta)}{(\xi^2+\eta^2)[a-c)\xi-2b\eta]} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (168)$$

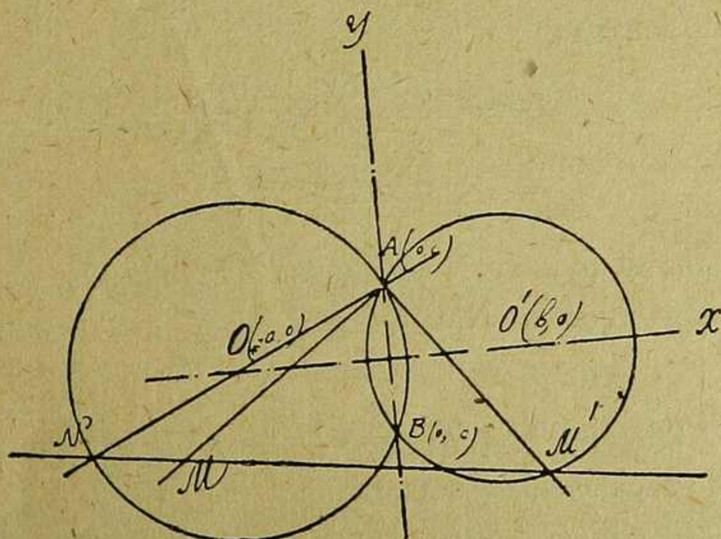
Зьнішчым назоўнік у (168), тады палучым:

$$[(a-c)\xi-2b\eta].(\xi^2+\eta^2)+4ac\xi^2+4b(a-c)\xi\eta-b^2.\eta^2=0 \quad . \; (169)$$

Палучылася раўнаньне тожсамае з (165).

§ 16. У тым-жа артыкуле Cl. Servais разуважвае яшчэ адзін спосаб пабудаваньня цыр. крывых, як геомэтрычнага месца пунктаў.

Няхай даны дзьве акружыны (рыс. 75) O і O′, якія злучаюцца ў пунктах A і B. Правядзем дыямэтр праз



Рыс. 75.

пункт A—AN і злучым пункт A, з зьменным пунктам M′ акружыны O′. Да лініі AM′ у пункце A узвядзем пэрпэндыкуляр і будзем шукаць геомэтрычнае месца пункту M злучэньня гэтага пэрпэндыкуляру з простай NM′. Геомэтрычным месцам пункту M будзе некаторая цыркулярная крывая 3-га парадку.

Возьмем лінію цэнтраў OO′ за вось X, а радыкальную вось акружын—AB за вось Y.

Каардынаты пункту A няхай будуць (o, c), а пункту B (o,—c). Каардынаты пункту O′—цэнтру—аднэй акружыны няхай будуць (b, o), а каардынаты цэнтру акружыны O азначым праз (—a, o). Тагды раўнаньні акружын O і O′ будуць:

$$x^2+y^2+2ax=c^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (170)$$

$$x^2+y^2-2bx=c^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (171)$$

Раўнаньне простай AM′ : $y-c=lx$ . . . . (172)

Раўнаньне простай AM:

$$y-c=-\frac{1}{l}x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (173)$$

альбо

$$l(y-c)=-x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (174)$$

Каардынаты пункту M′ знойдзем, разьвязаўшы сыстэму раўнаньняў:

$$x^2+y^2-2bx-c^2=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; ((175)$$

$$y=lx+c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (176)$$

Адсюль знаходзім:

$$x=-\frac{2(lc-b)}{1+l^2}=\frac{2(b-lc)}{1+l^2} \quad . \; . \; . \; . \; (177)$$

$$y=\frac{2bl+c-l^2c}{1+l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (178)$$

Каардынаты пункту N відавочна будуць: —2a, —c

Раўнаньне простай NM′ будзе:

$$\begin{vmatrix} x & , & y & , & 1 \\ -2a & , & -c & , & 1 \\ 2(b-lc) & , & 2bl+c-l^2 . c & , & 1+l^2 \end{vmatrix}=O \quad . \; . \; (179)$$

альбо ў расчыненым відзе:

$$x(-c-cl^2-2bl-c+cl^2)-y[-2a(1+l^2)-2(b-lc)]-(2bl+$$
$$+c-l^2c) . 2a+2c(b-lc)=O \quad . \; . \; . \; . \; (180)$$

пасьля некаторых спрашчэньняў палучым:

$$x(c+bl)-y[a(1+l^2)+(b-lc)]+a(2bl+c-l^2c)-c(b-lc)=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (181)$$

Для палучэньня раўнаньня геомэтрычнага месца трэба выключыць зьменны парамэтр l з (181) і (174)

з (174) находзім:

$$l=\frac{x}{c-y}$$

Падставім гэты выраз l у раўнаньне (181), тагды атрымаем:

$$x\left(c+\frac{bx}{c-y}\right)-y\left[a\left(1+\frac{x^2}{(c-y)^2}\right)+\left(b-\frac{cx}{c-y}\right)\right]+$$

$$+a\left(\frac{2bx}{c-y}+c-\frac{cx^2}{(c-y)^2}\right)-c\left(b-\frac{cx}{c-y}\right)=0 \quad . \quad . (182)$$

Зьнішчым назоўнік тады будзем мець:

$$(cx-xy)(c^2-cy+bx)-y(ac^2-2acy+ay^2+ax^2)+(bcy-by^2-$$
$$-cxy)(c-y)+2abx(c-y)-acx^2+ac(c-y)^2=0 \quad . \quad . (183)$$

Раскрыўшы дужкі і зрабіўшы групіроўку членаў, знаходзім:

$$(a+b)\,.\,y\,.\,(x^2+y^2)-c(b-a)x^2+(c^2+2ab)xy-c(2b+3a)y^2-$$
$$-c(c^2+2ab)x+c^2(3a+b)y-ac^3=0 \quad . \quad . \quad . (184)$$

Палучаецца *цыркулярная крывая 3 парадку агульнага віду.*

Яе сапраўдная асымптота паралельна восі X, г. зн. лініі цэнтраў акружын.

Калі акружыны O і O′ датычныя (пункты A і B супадаюць), то па гэтаму спасабу палучаецца цырк. крывая, якая распадаецца на вось X і акружыну.

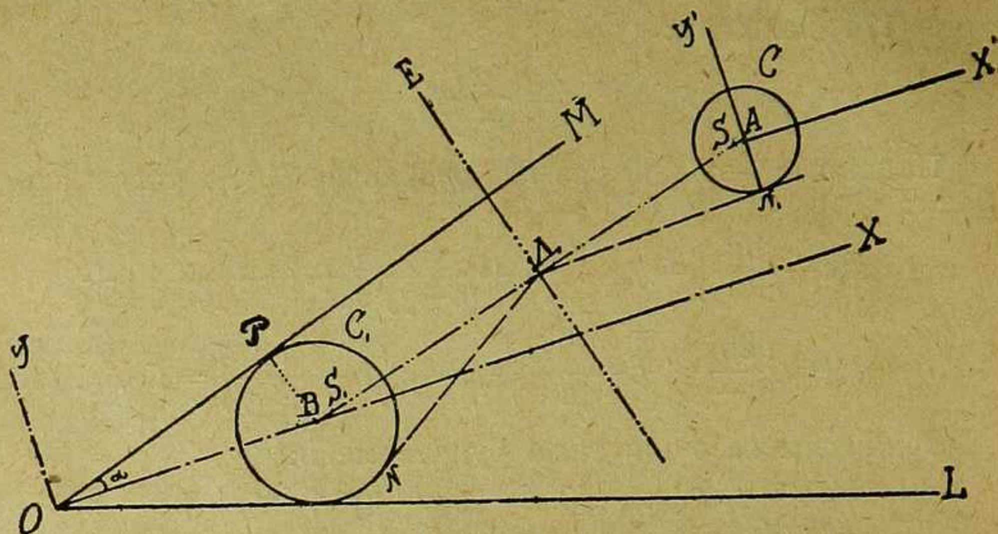
Яе раўнаньне лёгко палучаецца з агульнага (184) пры c=O.

§ 18. Дадзім у заключэньне яшчэ два прыклады палучэньня цыркулярных крывых як геомэтрычнага месца пунктаў.

Няхай нам дана сталая акружына C радыусу r і дзьве простыя L і M (рысун. 76). Возьмем зьменную акружыну C_1, якая датычна да абедзьвюх простых L і M, і будзем разглеждваць геомэтрычнае месца пунктаў. Poncelet (гл. I. § 18), кожнай з пар акружын C і C_1. Геомэтрычным ме-

сцам гэткіх пунктаў будзе нейкая цыркулярная крывая 3-га парадку.

Знойдзем яе раўнаньне. Возьмем пункт O злучэньня L і M за пачатак Дэкарт. простаст. сыстэмы і выберам за



Рыс. 76.

вось X бісэктрысу кута, утворанага гэтымі простымі. Раўнаньне сталай акружыны C няхай будзе:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; (185)$$

дзе a і b коордынаты пункту A.

Коордынаты цэнтру B зьменнай акружыны C_1 няхай будуць (m, o).

Тады яе раўнаньне напішацца так:

$$(x-m)^2+y^2-R^2=O \quad . \; . \; . \; . \; , \; . \; . \; (186)$$

Але R можна выразіць праз m з трыкутніка BPO:

$$R=m \,.\, Sn\alpha$$

гдзе α ёсьць кут BOM. Абазначыўшы кутавы коэфіцыэнт простай M праз k, знойдзем, што

$$Sin\alpha=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \text{ і } R=\frac{mk}{\sqrt{1+k^2}}$$

тады раўнаньне (186) можа быць перапісана наступным чынам:

$$x^2+y^2-2mx+m^2-\frac{m^2k^2}{1+k^2}=O \quad . \; . \; . \; . \; (187)$$

альбо

$$x^2+y^2-2mx+m^2 . l^2=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; (188)$$

дзе літараю l азначана для скарачэньня сталая: $\frac{1}{1+k^2}$

Раўнаньне лініі цэнтраў BA будзе:

$$\begin{vmatrix} x , & y , & 1 \\ a , & b , & 1 \\ m , & o , & 1 \end{vmatrix} = O \quad . \; . \; . \; . \; . \; (189)$$

альбо

$$bx+(m-a)y-bm=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; (190)$$

Напішам раўнаньне радыкальнай восі DE акружын C і C_1.

Яно палучыцца, калі з левай часткі раўнаньня (185) адымем левую частку раўнаньня (187) і розьніцу прыраўняем да O.

Зрабіўшы гэтае, лёгка знаходзім:

$$2(m-a)x-2by+t^2-m^2l^2=O \quad . \; . \; . \; . \; (191)$$

дзе $t^2=a^2+b^2-r^2$—нейкая сталая.

Перанясем цяпэр пачатак коордынат у пункт A—цэнтр нярухомага круга. Формулыператварэньня будуць:

$$x=x'+a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (192)$$
$$y=y'+b$$

Раўнаньне лініі цэнтраў пасьля гэтага будзе:

$$bx'+(m-a) . y'=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (193)$$

А раўнаньне радык. восі:

$$2(m-a)x'-2by'-(u^2+m^2l^2)=O \quad . \; . \; . \; . \; (194)$$

дзе $u^2=a^2+b^2+r^2$—сталая колькасьць.

Знойдзем коордынаты (x_c, y_c) пункту D. Для гэтага трэба разьвязаць сумесна сыстэму раўнаньняў [1]):

$$2(m-a)x-2by-(u^2+m^2l^2)=O \quad . \; . \; . \; . \; (195)$$

$$b . x+(m-a) . y=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (196)$$

---

[1]) Значкі ′ у коордынат x′ і y′ апушчаны.

$$x_c = -\frac{\begin{vmatrix} -(u^2+m^2l^2), & -2b \\ o & , m-a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(m-a) & , -2b \\ b & , m-a \end{vmatrix}} = -\frac{(a-m)(u^2+m^2l^2)}{2[(m-a)^2+b^2]} \ . \ (197)$$

$$y_c = -\frac{\begin{vmatrix} 2(m-a), & -(u^2+m^2l^2) \\ b & , o \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(m-a) & , -2b \\ b & m-a \end{vmatrix}} = -\frac{b(u^2+m^2l^2)}{2[(m-a)^2+b^2]} \ . \ (198)$$

Гранічныя пункты Poncelet пары акружын C і C_1 знойдуцца ў злучэньні лініі цэнтраў (193) з акружынай, маючай цэнтр у пункце D (x_c, y_c) і радыус, роўны даўжыні датычнай

$$DN_1 = DN$$

да аднэй з акружын C альбо C_1.

Раўнаньне акружыны C у новай сыстэмы восяй будзе:

$$x^2+y^2-r^2=O \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (199)$$

Даўжыня датычнай DN_1:

$$\sqrt{x_c^2+y_c^2-r^2}$$

Значыцца, раўнаньне акружыны з цэнтрам у пункце D і радыусам DN_1 будзе наступнае:

$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=x_c^2+y_c^2-r^2 \quad . \ . \ . \ . \ (200)$$

Альбо па спрашчэньні:

$$x^2+y^2-2xx_c-2yy_c+r^2=O \quad . \ . \ . \ . \ . \ (201)$$

Раўнаньне шуканага геомэтрычнага месца палучым па выключэньні з сыстэмы раўнаньняў (193), (197), (198) і (201): x_c y_c і m.

З (193) маем

$$m=\frac{ay-bx}{y} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (202)$$

$$\text{Далей: } a-m=\frac{bx}{y} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (203)$$

Пасьля надстаноўкі гэтых выразаў m і a—m у раўнаньні (197) і (198) палучаем:

$$x_c=-\frac{x\,.\,[u^2y^2+l^2(ay-bx)^2]}{2by\,.\,(x^2+y^2)} \quad . \ . \ . \ . \ (204)$$

$$y_c=-\frac{y[u^2y^2+l^2(ay-bx)^2]}{2by(x^2+y^2)} \quad . \ . \ . \ . \ (205)$$

Пасьля падстаноўкі выразаў x_c і y_c з (204) і (205) у (201) знойдзем:

$$x^2+y^2+\frac{x^2[u^2y^2+l^2(ay-bx)^2]}{by(x^2+y^2)}+y^2\cdot\frac{[u^2y^2+l^2(ay-bx)^2]}{by(x^2+y^2)}+$$
$$+r^2=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (206)$$

Лёгка замеціць што, два сярэдніх члены пасьля складаньня могуць быць скарочаны на x^2+y^2, і мы палучым канчаткова раўнаньне шуканага геомэтрычнага месца ў такім выглядзе:

$$by(x^2+y^2)+u^2y^2+l^2(ay-bx)^2+br^2y=O \quad . \; . \; . \; (207)$$

Раўнаньне (207) вызначае *цыркулярную крывую 3-га парадку* з сапраўднай асымптотай паралельнай восі X—бісэктрысе кута паміж данымі простымі L і M.

Указаньне на такі спосаб утварэньня цырк. крывой знойдзена намі ў памянёным вышэй мемуары J. Casey: „On Bicirlular Quartics“. Ніякага доваду гэтага там ня маецца. Гэты довад, як і довады теорэм Servais, прыводзяцца тут ў першы раз.

§ 18. V. Jeřábek у артыкуле: „O zvláštní circulární křivce, stupně, tretího“, які зьмяшчаны ў XX výročni zpráva Vyšší Realné Školy v Brně за 1901 год, разуважвае наступны спосаб утварэньня цыркулярнай крывой 3-га парадку.

У роўніцы сталага эліпсу праз некаторы полюс M і адрэзак адпаведнай яму поляры адносна эліпсу, азначаецца некаторы трыкутнік. Калі цэнтр апісанай навокал гэтага трыкутніка акружыны праходзіць увесь час праз біэктрысу аднэй з пар утвораных галоўнымі восямі эліпсу вэртыкальных кутоў, то пункт M апісвае ў роўніцы эліпсу цыркулярную крывую 3-га парадку.

Няхай раўнаньне данага эліпсу будзе:

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (208)$$

Раўнаньне поляры некаторага полюсу M (α, β) адносна гэтага эліпсу, як вядома, будзе:

$$b^2\alpha x+a^2\beta y-a^2b^2=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (209)$$

Палажыўшы для скарачэньня

$$m=\frac{b^2\alpha}{a^2\beta}; \; n=-\frac{b^2}{\beta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (209a)$$

перапішам раўнаньне (209) гэткім чынам:

$$y+mx+n=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (210)$$

Возьмем яшчэ раўнаньне некаторай простай у роўніцы эліпсу:

$$y+m_1x+n_1=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (211)$$

Тады раўнаньне:

$$\lambda(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)+(y+mx+n)(y+m_1x+n_1)=0 \quad . \quad (212)$$

будзе прадстаўляць, як вядома, пучок конічных сячэньняў, праходзячых праз пункты злучэньня эліпсу (208) з простымі (210) і (211).

Карыстаючыся адвольнасьцю парамэтраў λ, m_1 і n_1, азначым іх такім чынам, каб конічнае сячэньне (212) была акружынай, якая праходзіць праз пункт $M(\alpha, \beta)$ і пункты N і P злучэньня поляры (210) з эліпсам.

Для таго, каб раўнаньне (212) была акружынай, неабходна і дастатква, каб

$$m+m_1=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (213)$$

$$\lambda b^2+mm_1=\lambda a^2+1 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (214)$$

З (213) $m_1=-m$, а з (214):

$$\lambda=\frac{1+m^2}{b^2-a^2}=\frac{b^4\alpha^2+a^4\beta^2}{a^4 \,.\, \beta^2(b^2-a^2)} \quad . \; . \; . \; . \quad (215)$$

Для таго, каб акружына (212) прайшла праз пункт $M(\alpha, \beta)$ трэба, каб

$$\lambda(b^2\alpha^2+a^2\beta^2-a^2b^2)+(\beta+m\alpha+n)\,.\,(\beta+m_1\alpha+n_1)=0 \quad . \quad (216)$$

Пасьля падстаноўкі ў раўнаньне (216) замест λ, m і n іх выразаў з (215) і (206а), мы пасля нескладаных вылічэньняў знойдзем такую ўмову:

$$b^2(\alpha^2+\beta^2)+n_1\beta\,.\,(b^2-a^2)=0 \quad . \; . \; . \; . \quad (217)$$

З раўнаньня (217) находзім патрэбнае значэньне n_1:

$$n_1=\frac{b^2(\alpha^2+\beta^2)}{\beta(a^2-b^2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (218)$$

Пасля падстаноўкі ў раўнаньне (212) знойденых значэньняў λ, m_1 і n_1 мы і палучым раўнаньне акружыны, апісанай навокал трыкутніка MNP у канчатковым выглядзе:

$$(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)(x^2+y^2)-b^2\alpha(\alpha^2+\beta^2+a^2-b^2)\,.\,x-a^2\beta(\alpha^2+\beta^2-a^2+$$
$$+b^2)\,.\,y+(a^2-b^2)(b^2\alpha^2-a^2\beta^2)=0 \quad . \; . \; . \; . \quad (219)$$

Координаты цэнтру S (x_c y_c) акружыны (219), як вядома, будуць:

$$x_c=\frac{b^2\alpha(\alpha^2+\beta^2+e^2)}{2(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)};\; y_c=\frac{a^2\beta(\alpha^2+\beta^2-e^2)}{2(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)} \quad . \; . \; . \quad (220)$$

дзе $a^2-b^2=e^2$.

Калі цэнтр акружын (219) павінен ляжаць на бісэктрысе координатнага кута:

$$y = x \quad . \, . \, , \, . \, . \, . \, . \, . \, (221)$$

то мы будзем мець умову:

$$\frac{1}{2(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)}[b^2\alpha(\alpha^2+\beta^2+e^2)-a^2\beta(\alpha^2+\beta^3-e^2)]=O \quad . \, (222)$$

Выраз, стаячы ў квадратовых дужках, калі яго прыраўняем да 0 і дасьць нам шуканае раўнаньне, якое здавальняецца координатамі пункту $M\ (\alpha, \beta)$). Замяніўшы ў ім літары α і β праз звычайныя азначэньні бягучых координат крывой:—x і y, мы палучым, пасьля вельмі нескладаных пэратварэньняў, раўнаньне шуканага геомэтрычнага месца полюсу M у гэткім выглядзе:

$$(b^2x-a^2y)(x^2+y^2)+e^2(b^2x+a^2y)=O \quad . \, . \, . \, . \, (223)$$

Раўнаньне (223) дае цыркулярную крывую 3-га парадку, якая праходзіць праз цэнтр данага эліпсу.

§ 17. *Прынцып геомэтрычных пэратварэньняў.*

У главе II была паказана прыстасаваньне способу інвэрзіі да вывучэньня ўласьцівасьцяў цыркулярных крывых 3-га парадку.

Назавем антыінвэрзійным пэратварэньне, якое творыцца па формулам:

$$x = \frac{x'^2+y'^2}{k^2x'} \qquad y = \frac{x'^2+y'^2}{k^2y'} \quad . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (224)$$

Крывая 2-га парадку пры пэратварэньні па гэтых формулах пераходзіць ў крывую 6-га парадку, але ў выпадку параболы мы палучаем і пасьля антынівэрзійнага пэратварэньня цыркулярную крывую 3-га парадку (цысоіду) таксама як і пасля інвэрзійнага пэратварэньня (з іншымі, зразумела, коэфіцыентамі).

Сапраўды возьмем раўнаньне параболы:

$$y^2 = 2px \quad . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (225)$$

і пэратворым яго по формулах (224), тады палучым:

$$\frac{(x'^2+y'^2)^2}{k^4 \, . \, y'^2} = \frac{2p \, . \, (x'^2+y'^2)}{k^2x'} \quad . \, . \, . \, . \, . \, (226)$$

альбо па спрашчэньні:

$$x'(x'^2+y'^2)=2pk^2y'^2 \quad . \, . \, . \, . \, . \, . \, (227)$$

палучылі раўнаньне цысоіды; (апроч раўнаньня x'^2+ $+y'^2=O$).

Цысоіда, якая палучаецца ад інвэрзійнага ператварэньня параболы (225), будзе:

$$x'(x'^2+y'^2)=\frac{k^2}{2p}y'^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (226)$$

Адмецім некаторыя агульныя ўласьцівасьці антыінвэрзійнага ператварэньня:

1) простая: $Ax+By+C=O$, не праходзячая праз пачатак каардынат (полюс) антыінвэрзіі, пераходзіць у цыркулярную крывую 3 парадку, якая мае падвойны пункт у полюсе антыінвэрзіі, кутавы коэфіцыент сапраўднай асымптоты палучанай крывой ёсьць колькасьць, адваротная кутоваму коэфіцыенту данай простай.

Сапраўды, раўн. простай:

$$Ax+By+C=O$$

пасьля ператварэньня пяройдзе ў наступнае:

$$(Bx'+Ay')(x'^2+y'^2)+Ck^2x'y'=O \quad . \ . \ . \ (226)$$

З апошняга раўнаньня ўсе ўласьцівасьці п. I знаходзяцца няпасрэдна.

2) простая: $Ax+By=O$, якая праходзіць праз пачатак каардынат (полюс антыінвэрзыі), пяройдзе ў простую:

$$Ay'+Bx'=O \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (227)$$

прычым кутавы коэфіцыент яе будзе адваротны кутавому коэфіціенту данай простай.

3) Акружына, якая не праходзіць праз полюс антыінвэрзіі, ператвараецца ў крывую 6-га парадку, а акружына, якая праходзіць праз полюс ператвараецца ў крывую, якая распадаецца на пачатак каардынат (акружыну нулявога радыусу) і крывую 4-га парадку.

Ператварэньне, якое названа ў § 19 антыінвэрзійным, ператварае ўсе простыя, якія праходзяць праз пачатак каардынат у простыя, а простыя, якія не праходзяць праз пачатак каардынат у цырк. крывыя 3-га парадку.

Можна разуважыць гэтае ператварэньне з іншага пункту погляду.

Мы можам так выбраць два проектыўныя пучкі простых, каб конічнае сячэньне, імі ўтворанае, распалася на дзьве простыя, аднэй з якіх будзе даная простая: $Ax+$ $+By+C=O$.

Тады магчыма падвергнуць антыінвэрзійнаму пераtварэньню абодвы гэтыя пучкі лучоў.

Геомэтрычным месцам пунктаў злучэньня адпаведных лучоў двох гэткіх антыінвэрзійных пучкоў і будзе цыркулярная крывая 3-га парадку.

Гэты выбар проектыўных пучкоў магчыма зрабіць інады некалькімі спосабамі, і такім чынам мы можам палучыць новыя спосабы ўтварэньня цыркулярных крывых.

Тут мы падвяргаем пераtварэньню не об'екты процэсаў (нейкія геомэтрычныя вобразы), а тыя самыя процэсы ў выніку якіх палучаецца першапачатковы вобраз (у даным выпадку—простая).

Напрыклад, простая: $Ax+By+C=O$ можа быць палучана, як геомэтрычнае месца пунктаў злучэньня пучка лучоў:

$$y=\lambda x$$

з цэнтрам у пачатку координат, і пучка роўналежных лучоў

$$x=\mu$$

прычым парамэтры λ і μ звязаны суадносінамі:

$$A\mu+B\lambda\mu+C=O$$

Адкуль:

$$\mu=-\frac{C}{A+B\lambda}$$

Шуканыя проектыўныя пучкі будуць

$$1)\ y=\lambda x$$

$$2)\ x=-\frac{C}{A+B\lambda}$$

Па выключэньні з 1) і 2) парамэтра λ мы і палучым шуканае геомэтрычнае месца: $x(Ax+By+C)=O$. Яно распадаецца на дзьве злучаючыяся простыя: $x=O$... вось ордынат

і $Ax+By+C=O$... даная простая.

Пучок 1) пераtвараецца па формулах антыінвэрзіі ў

$$\frac{x'^2+y'^2}{k^2y'}=\lambda\frac{(x'^2+y'^2)}{k^2x'},\ \text{альбо: } y'-\frac{1}{\lambda}x'=O \quad . \quad . \ (230a)$$

г. зн. у пучок простых. [Множнік $x'^2+y'^2$, прыроўнены да нуля, дае, зразумела, полюс антыінвэрзіі].

Пучок

$$x=-\frac{C}{A+B\lambda}$$

пeратвараецца ў:

$$\frac{x'^2+y'^2}{k^2x} = -\frac{C}{A+B\lambda}, \text{ альбо}$$

$$(A+B\lambda)(x'^2+y'^2)+Ck^2x'=O, \text{ г. зн. } Ax'^2+Ay'^2+Ck^2x'+ +\lambda B(x'^2+y'^2)=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (231a)$$

Атрымоўваем параболічны пучок акружын з цэнтрам у полюсе антыінвэрзіі. Асноўнымі акружынамі пучка зьяўляюцца полюс антыінвэрзыі і акружына:

$$x'^2+y'^2+\frac{Ck^2}{A}x'=O$$

Гэта адпавядае агульнаму спосабу ўтварэньня цырк. крывых (пучкі 230а і 231а лінейна залежаць ад парамэтра λ).

Але магчыма прадставіць сабе простую: $Ax+By+C=O$, як утваранаю шляхам злучэньня адпаведных праменьняў двох проектыўных пучкоў з бяскрайна далёкімі цэнтрамі:

$$x=\lambda \text{ — 1-й пучок}$$
$$y=\mu \text{ — 2-й пучок}$$

Прычым ізноў λ і μ зьвязаны раўнаньнем: $A\lambda+B\mu+C=O$, адкуль $\mu=-\frac{C+A\lambda}{B}$

Тады будзем зноў мець два проектыўныя пучкі: $x=\lambda$

$$y=-\frac{C+A\lambda}{B}$$

Шляхам пeратварэньня іх па формулах антыінверзіі атрымаем два пучкі акружын:

$$x'^2+y'^2-k^2.\lambda x'=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (232a)$$

$$x'^2+y'^2+\frac{Ck^2y'}{B}+\lambda\frac{Ak^2y'}{B}=O \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (233a)$$

лінейна залежных ад парамэтра λ. Гэтыя пучкі ортогональныя.

Па выключэньні парамэтра λ з 232а і 233а мы атрымоўваем:

$$(Bx'+Ay')(x'^2+y'^2)+C.k^2.x'.y'=O$$

цырк. крывую 3-га парадку з падвойных пунктам у пачатку коордынат.

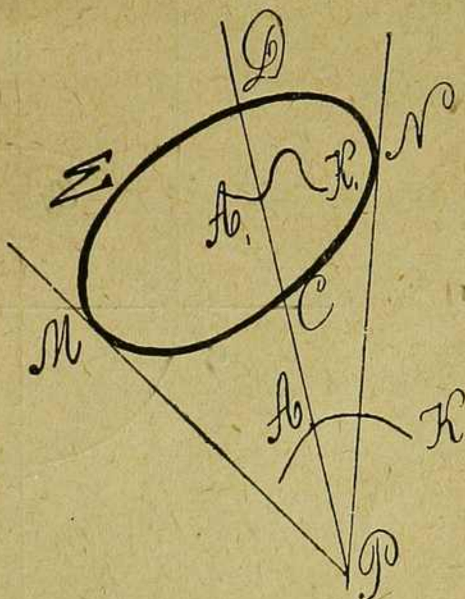
Яе сапраўдная асымптота будзе антыінверзійным пeратварэньнем простай, роўналежнай: $Ax+By+C=O$, і праходзячай праз пачатак коордынат.

Такім чынам, крывая 3-га парадку можа быць атрымана як геомэтрычнае месца пунктаў злучэньня двох ортогональных пучкоў акружын, лінейна залежных ад аднаго і таго-ж парамэтра λ.

§ 20. Калі возьмем некаторае конічнае сячэньне Σ (назавем яго асноўным конічным сячэньнем) і некаторы пункт P на яго роўніцы, то на ўсякім лучу, які пройдзе праз пункт P, мы палучым наогул два пункты C і D злучэньня гэтага луча з крывой Σ. Усякаму адвольнаму пункту A луча будзе адпавядаць пункт A_1 на гэтым лучу — чацьверты гармонічны з A адносна пунктаў C і D. Назавем пункт A_1 адпаведным пункту A у гэтым ператварэньні. Пункт P назавем полюсам ператварэньня. [Hilton, Plane Algebraic Curves, Chapter IX, Quadratic transformations, p 121].

Калі пункт A апісвае некаторую крывую K, то геомэтрычным месцам пунктаў A_1 будзе некаторая новая крывая K_1, адпаведная крывой K. (рысун. 77).

Назавем такое ператварэньне *абагульненай інвэрзіяй.*



Рыс. 77.

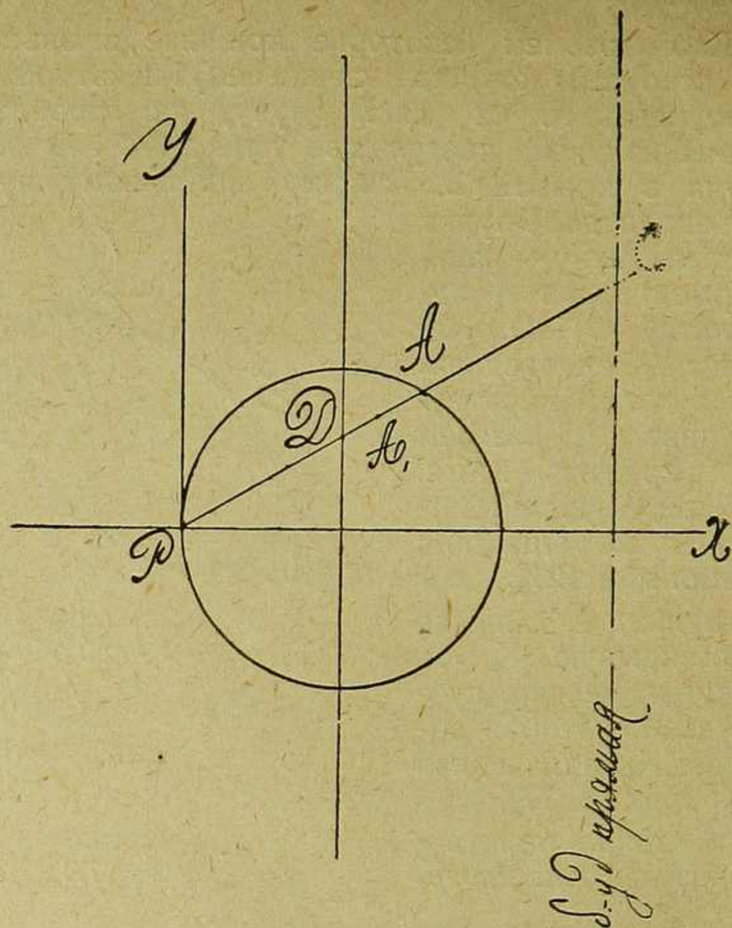
Паложым, што Σ распадаецца на дзьве простыя, з якіх адна бяскрайна-далёкая і знойдзем пры гэтым дапушчэньні ператварэньне акружыны радыусу $\frac{r}{2}$, якая праходзіць праз пачатак коордынат і мае цэнтр на восі X, па спосабу абагульненай інвэрзіі.

Няхай раўнаньне данай акружыны (рысунак 78) будзе

$$x^2+y^2-rx=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (228)$$

Адна з простых, на якія па ўмове распадаецца асноўнае конічнае сячэньне Σ, няхай пройдзе праз цэнтр акружыны (228). Другая простая—бяскрайна далёкая. Пункт P у пачатку коордынат.

Геомэтрычным месцам пункту А будзе месца срэдзін адрэзкаў ДА, бо для пунктаў Д, А і С (бяскрайна далёкага) чацьвертым гармонічным будзе срэдзіна ДА.



Рыс. 78.

Знойдзем координаты гэтай срэдзіны. Знойдзем спачатку координаты пунктаў Д і А.

Раўнаньне простай Σ будзе:

$$2x-r=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (229)$$

Раўнаньне простай PA:

$$y=kx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (230)$$

Координаты пункту А найдуцца з сыстэмы раўнаньняў:

$$x^2+y^2-rx=O$$

$$y=k \, . \, x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (231)$$

Адкуль:

$$x=\frac{r}{1+k^2};\ y=\frac{rk}{1+k^2}\ \ldots\ldots\ (232)$$

Другая пара разьвязкаў дасьць коордынаты пункту P.

Коордынаты пункту D знайдзем з сыстэмы.

$$\begin{aligned}2x&=r\\ y&=kx\end{aligned}\ \ldots\ldots\ldots\ (233)$$

Адкуль

$$x=\frac{r}{2};\ y=\frac{kr}{2}\ \ldots\ldots\ (234)$$

Абазначыўшы коордынаты пункту A_1 праз ξ і η, атрымаем згодна з папярэднім:

$$\xi=\frac{1}{2}\left[\frac{r}{1+k^2}+\frac{r}{2}\right]=\frac{r}{4}\cdot\frac{3+k^2}{1+k^2}\ \ldots\ (235)$$

$$\eta=\frac{kr}{2}\left[\frac{1}{1+k^2}+\frac{1}{2}\right]=\frac{kr}{4}\cdot\frac{3+k^2}{1+k^2}\ \ldots\ (236)$$

З прычыны таго, што пункт A_1 ляжыць на прамені PA,

то $\eta=k\xi$, адсюль $k=\frac{\eta}{\xi}$ . . . . (237)

Выключыўшы k з раўнаньняў (235) і, (236), альбо, што прасьцей, з (235) і (237), мы атрымаем:

$$\xi=\frac{r}{4}\ \frac{3\xi^2+\eta^2}{\xi^2+\eta^2}\ \ldots\ldots\ (238)$$

Пасьля зьнішчэньня назоўніка:

$$4\xi(\xi^2+\eta^2)=r(3\xi^2+\eta^2)\ \ldots\ldots\ (239)$$

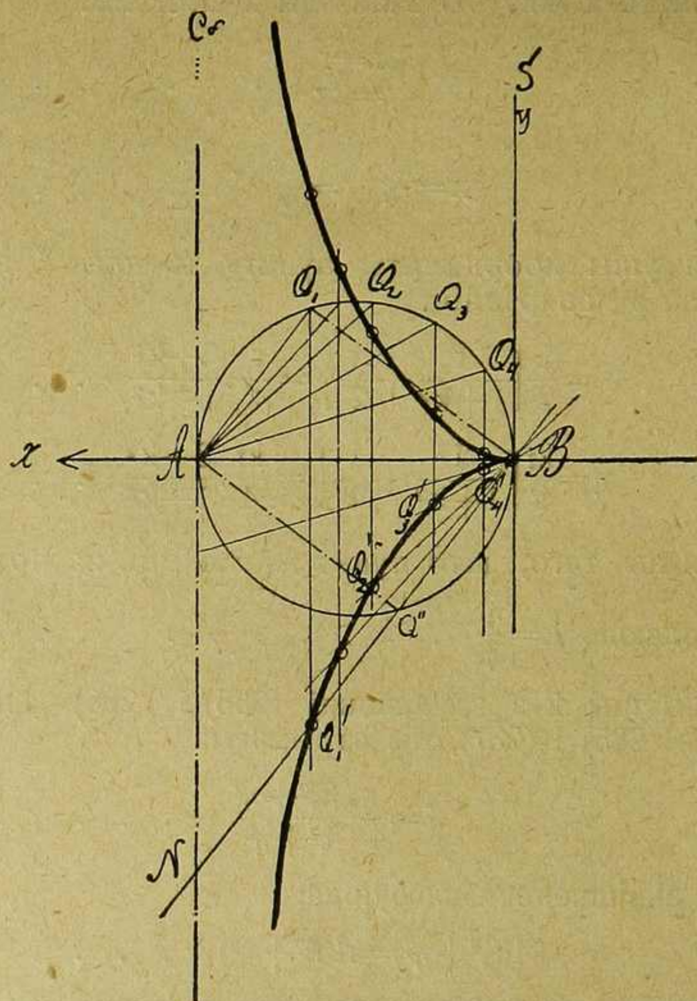
Атрымалася цыркулярная крывая з падвойным пунктам у полюсе інвэрзіі. Яе інвэрзійным ператварэньнем будзе эліпс:

$$3rx^2+ry^2-4k^2x=O\ \ldots\ldots\ (240)$$

Крывую, аналёгічную атрыманай разглядаў Jeřabek, Mathesis (2) (VI) і Retali—Mathesis IX 1899, на падставе іншых меркаваньняў. Retali ў сваім артыкуле разглядае і некаторыя яе ўласьцівасьці, а таксама і крывыя, якія могуць быць атрыманы пры іншых палажэньнях тэй акружыны, якая ператвараецца.

§ 21. Трэба ўпамянуць у заключэньне яшчэ аб адным ператварэньні, якое прапанаваў Schoute і даў яму назву Маклорэнавага ператварэньня (Archives néerlandaises 1887).

Гэтае ператварэньне дае магчымасьць атрымаць цыркулярныя крывыя шляхам ператварэньня некаторай акружыны.



Рыс. 79.

Ператварэньне Schoute наогул зводзіцца да наступнага:

на роўніцы даны тры пункты A, B, C і некаторая простая f.

Будзем лічыць адпаведным нейкаму пункту Q гэтай роўніцы такі пункт на простай CQ, які атрымаецца, калі мы злучым пункт B з пунктам D злучэньня простай AQ з f і працягнем BD да злучэньня з простай CQ.

Разгледзім цікавыя для нашай тэмы часныя выпадкі гэтагаператварэньня.

I. Возьмем пункт A і B у канцох дыямэтра некаторай акружыны, цэнтр якой няхай будзе ў пункце M. Пункт C возьмем у бесканечнасьці па напрамку, пэрпэндыкулярнаму да дыямэтру AB, за простую f бяскрайна-далёкую простую і пературым па Маклорэнаваму ператварэньню пункты гэтай акружыны.

Возьмем пункт B за пачатак простакутнай Дэкарт. сыстемы коордынат і кіруем вось X ад A (Рысун. 79). Пэрпэндыкуляр BS возьмем за вось У. Радыус акружыны азначым літарай *a*.

Коордынаты пункту Q_1 азначым праз x_1 y_1. Адпаведны пункт Q_1 будуецца, згодна з вышэй сказаным правілам, наступным чынам:

Злучым пункт Q_1 з A і правядзем праз B простую паралельную AQ_1. З пункту Q_1 праводзім простую, паралельную AC, іх перасячэньнем і будзе пункт Q_1', адпаведны Q_1. З рысунку бачым, што трыкутнікі: $AQ'N$ і $Q_1\,Q_1'$ B роўныя, значыцца:

$$NQ''=BQ'_1$$

і такім чынам геомэтрычным месцам пунктаў Q' будзе *цысоіда Дыоклеса*.

Ня цяжка паказаць тое-ж самае і аналітычным шляхам, які можа быць дапасаваны і да разгляду двох наступных выпадкаў.

Раўнаньне простай AQ_1 будзе:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ 2a, & 0 & 1 \end{vmatrix} = O \quad \ldots\ldots \quad (241)$$

альбо у раскрытым выглядзе:

$$xy_1-y(x_1-2a)-2ay_1=O \quad \ldots\ldots \quad (242)$$

Раўнаньне простай BQ'_1 паралельнай AQ_1:

$$xy_1-y(x_1-2a)=O \quad \ldots\ldots \quad (243)$$

Раўнаньне простай Q_1Q_1':

$$x=x_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (244)$$

Для атрыманьня раўнаньня геомэтрычнага месца пункту Q' трэба выключыць x_1 і y_1 з раўнаньняў (243) (244) і раўнаньня

$$x_1^2+y_1^2-2ax_1=O \quad \ldots\ldots \quad (245)$$

якое вызначае, што пункт Q_1 ляжыць на акружыне.

З (243) і (244) знойдзем

$$y_1=\frac{(x-2a)}{x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (246)$$

Падставіўшы ў (245) замест x_1 x, а замест y_1 яго выраз з (246), атрымаем:

$$x^2+y^2.\frac{(x-2a)^2}{x^2}-2ax=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; (247)$$

альбо

$$x^4+y^2(x-2a)^2-2ax^3=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (248)$$

Узяўшы ў групу першы і апошні члены (248), знойдзем:

$$x^3(x-2a)+y^2(x-2a)^2=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (249)$$

Раўнаньне (249) распадаецца на сумножнікі:

$$(x-2a).(x^3+xy^2-2ay^2)=O \quad . \; . \; . \; . \; (250)$$

$x-2a=O$—раўнаньне простай AC.

$x(x^2+y^2)-2ay^2=O$ ёсьць раўнаньне *цысоіды Дыоклеса.*

Пункт B — яе падвойны пункт; CA — яе сапраўдная асымптота.

II. Возьмем пункт A на акружыне некаторага радыусу a, пункт B у яе цэнтры, пункт C у бяскрайнасьці ў напрамку пэрпэндыкулярным да напрамку AB, за простую f возьмем бяскрайна далёкую простую.

Пабудаваньне пункту Q_1', адпаведнага Q_1 зразумела з рысунку № 80. Прымаем пункт B за пачатак коордынат. Восі x і y накіруем так, як паказана на рысунку 80.

Знойдзем геомэтрычнае месца пункту Q_1'.

Коордынаты пункту Q_1 няхай будуць x_1 і y_1

Раўнаньне простай AQ_1:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ -a, & o & 1 \end{vmatrix} = O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (251)$$

У раскрытым выглядзе:

$$xy_1-y(x_1+a)+ay_1=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; (252)$$

Раўнаньне простай BQ_1':

$$xy_1-y(x_1+a)=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (253)$$

Раўнаньне простай Q_1Q':

$$x = x_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (254)$$

Для атрыманьня раўнаньня геомэтр. месца трэба выключыць x_1 і y_1 з (253), (254) і раўнаньня

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (255)$$

якое дае ўмову знаходжаньня пункту Q_1 на акружыне.

Рыс. 80.

Пасьля выключэньня атрымаем:

$$x^4 + y^2(x+a)^2 - a^2x^2 = O \quad . \; . \; . \; . \; . \; (256)$$

Левая частка апошняга раўнаньня лёгка раскладаецца на сумножнікі

$$(x+a)[x(x^2+y^2) - a(x^2-y^2)] = O \quad . \; . \; . \; . \; (257)$$

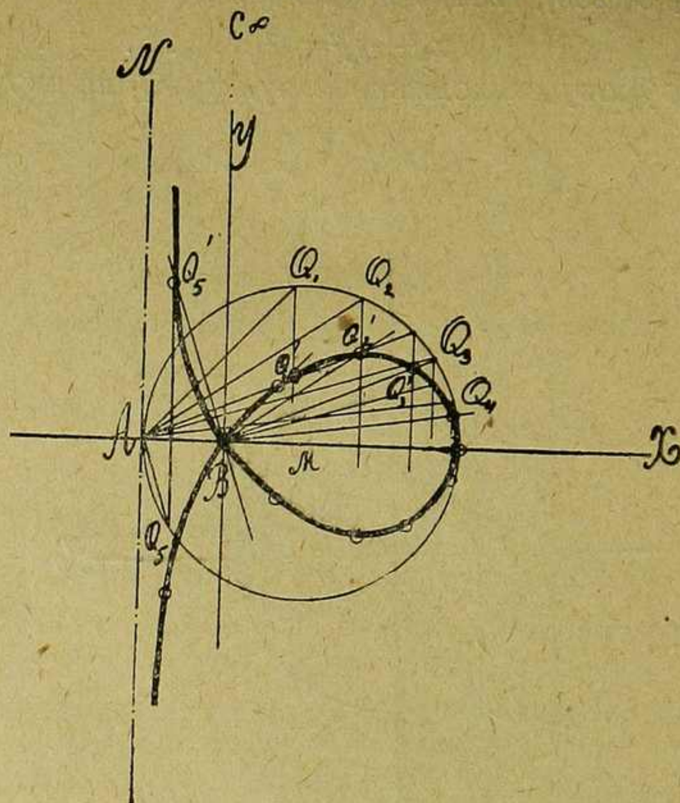
Раўнаньне (257) распадаецца на:

$x + a = O$ простая AN . . . . . (258)

$x(x^2+y^2) - a(x^2-y^2) = O$ — *строфоіда* [гл. 2-я, § 11] . (259)

Вяе падвойны пункт, AN—сапраўдная асымптота.

III. Возьмем пункт A зноў на акружыны радыусу 2a (рысун. 81). Пункт B выберам у сярэдзіне яе радыусу AM. Узяўшы B за пачатак координат, накіруем восі згодна рысунку 81. Пункт C, як і раней, выберам у бяскрайнасьці



Рыс. 81.

ў напрамку BY. f—бяскрайна далёкая простая. Пабудаваньне пунктаў Q′ ясна з рысунку.

Знойдзем геомэтрычнае месца пунктаў, адпаведных пунктам акружыны M. Раўнаньне простай AQ_1 (координаты пункту Q_1: x_1, y_1) вызначыцца наступным дэтэрмінантам:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x & y & 1 \\ -a, & o, & 1 \end{vmatrix} = O \quad . \; . \; . \; . \; . \; (260)$$

У раскрытым выглядзе ён прымае форму:

$$xy_1 - y(x_1 + a) + ay_1 = O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (261)$$

Раўнаньне простай BQ_1':

$$xy_1 - y(x_1 + a) = O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (262)$$

Раўнаньне простай Q_1Q_1':

$$x = x_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (263)$$

Раўнаньне акружыны M:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 3a^2 = O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (264)$$

Для атрыманьня раўнаньня шуканага геомэтрычнага месца трэба, як і раней, выключыць x_1 і y_1 з сыстэмы трох раўнаньняў:

$$xy_1 - y(x_1 + a) = O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (262a)$$

$$x = x_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (263a)$$

$$x_1^2 + y^2_1 - 2ax_1 - 3a^2 = O \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (265)$$

Пасьля падстаноўкі x_1 і y_1 з (262a) і (263a) у (265) маем:

$$x^2 + \frac{y^2(x+a)^2}{x^2} - 2ax - 3a^2 = O \quad . \; . \; . \; . \quad (266)$$

альбо

$$x^4 + y^2(x+a)^2 - 2ax^3 - 3a^2x^2 = O \quad . \; . \; . \; . \quad (267)$$

Групуючы члены левай часткі (267), знойдзем:

$$x^2(x^2 - 2ax - 3a^2) + y^2(x+a)^2 = O \quad . \; . \; . \; . \quad (268)$$

альбо

$$x^2(x+a)(x-3a) + y^2(x+a)^2 = O \quad . \; . \; . \; . \quad (269)$$

Левая частка (269) раскладаецца на сумножнікі:

$$(x+a)[x^2(x-3a) + y^2(x+a)] = O \quad . \; . \; . \; . \quad (270)$$

Апошняе раўнаньне распадаецца гэткім чынам на

$$x + a = O \text{—простую } AN \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (271)$$

і цыркулярную крывую 3-га парадку

$$x(x^2 + y^2) + a(y^2 - 3x^2) = O \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (272)$$

якая завецца *трысэктрысай Маклорэна.*

B—яе падвойный пункт; AN—сапраўдная асымптота.

Даны аналітычны довад зьяўляецца досыць простым і зусім аналёгічна дапасоўваецца да ўсіх трох выпадкаў, чаго нельга сказаць аб геомэтрычных довадах гэтых теорэм, якія прыведзены ў Loria.

Трэба адзначыць, што ўказаны тут аналітычны мэтод доваду теорэм Schoute дапускае абагульненьне: можна браць

пункты A i B не на дыамэтрах, а на адвольных хордах тэй акружыны, якая ператвараецца, тады такім самым спосабам мы атрымаем цыркулярныя крывыя больш агульнага выгляду. Вывад іх раўнаньняў зрабіць зусім ня цяжка.

Рыс. 82.

У папярэдніх сыстэмах зьменіцца толькі выгляд першага і апошняга раўнаньняў.

§ 22. У якасьці прыкладу возьмем абагульненьне 3-га выпадку. Няхай некаторая акружына ператвараецца паводле ператварэньня Маклорэна.

Хорда AD роўна 4m.; пункт B — пачатак простакутнай. Дэк. сыстэмы кордынат. Пункт C у ∞ у напрамку BY; простая f—бяскрайна далёкая (рысунак 82).

Коордынаты цэнтру M_1 акружыны няхай будуць (m, n).

Яе радыус MD будзе тады:

$$MD=\sqrt{4m^2+n^2}$$

Раўнаньне простай AQ будзе:

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ -m, & o, & 1 \end{vmatrix} = O \quad . \; . \; . \; . \; (273)$$

альбо

$$xy_1-y(x_1+m)+my_1=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; (274)$$

Раўнаньне простай QQ′:

$$x=x_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (274a)$$

Раўнаньне ператвараемай акружыны:

$$(x-m)^2+(y-n)^2=4m^2+n^2 \quad . \; . \; . \; . \; (275)$$

альбо пасьля раскрыцьця дужак:

$$x^2+y^2-2mx-2ny-3m^2=O \quad . \; . \; . \; . \; (276)$$

Застаецца выключыць x_1 і y_1 (коордынаты пункту Q_1), з сыстэмы:

$$1)\ xy_1 - y(x_1+m) = 0 \quad \dots\dots \quad (277)$$

(раўнаньне простай BQ′ будзе мець выгляд 277).

$$2)\ x = x_1 \quad \dots\dots \quad (278)$$

$$3)\ x_1^2 + y_1^2 - 2mx_1 - 2ny_1 - 3m^2 = 0 \quad \dots \quad (279)$$

Пасьля выключэньня атрымаем наступнае раўнаньне:

$$(x+m)[x(x^2+y^2) - 3mx^2 - 2nxy + my^2] = 0 \quad \dots \quad (280)$$

Яно распадаецца на простую АК:

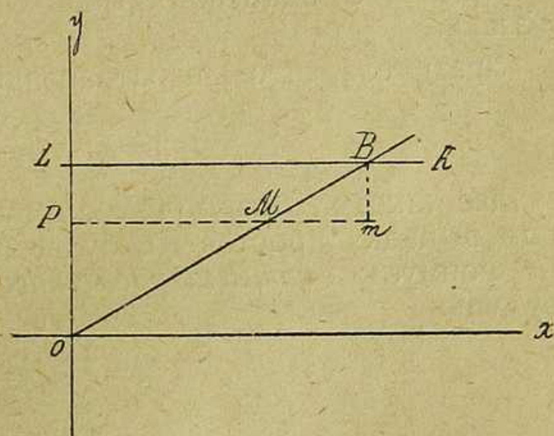
$$x+m=0$$

і *цыркулярную крывую* з падвойным пунктам у В:

$$x(x^2+y^2) - 3mx^2 - 2nxy + my^2 = 0 \quad \dots \quad (281)$$

АК—сапраўдная асымптота гэтай крывой [1]).

Можна было-б узяць пачатак коордынат (пункт В) ня ў сярэдзіне адрэзку AN, а ў сярэдзіне ND, тады зноў атрымаліся-б цыркулярная крывая з зьмененымі коэфіцыентамі пры x^2 і y^2; коэфіцыент 3 пяройдзе ў апошні член раўнаньня (281).



Рыс. 83.

§ 23. Ньютон у сваім Enumeratio linearum tertii ordinis (1706 г.) карыстаўся пературарэньнем па формулах

$$x = \frac{XY}{a};\ y = Y \quad \dots \quad (282)$$

Крывую C_1, якая атрымаўваецца з нейкай крывой С прыператварэньні яе раўнаньня па формулах (282), *Ньютон назваў hyperbolismus'ам* крывой С адносна простай: $y=a$.

Укажам геомэтрычны сэнс гэтага ператварэньня (рысун. 83).

Няхай будзе ХОУ сыстэма простакутных Дэкартавых восяй; KL простая $y=a$. Няхай далей пункт М будзе нейкі

---

[1]) Рэалізацыя гэтых ператварэньняў зроблена проф. Харк. І. Н. Асьветы, П. А. Салаўёвым, які сконструяваў прыладу для рысаваньня бесьперарыўным рухам цысоіды Дыоклеса, строфоіды і трысэктрысы Макл. Працы I Усесаюзнага Зьезду Мат. у Харкаве ў 1930 годзе.

пункт (x, y) крывой C. Злучыўшы M з O і правёўшы простую OM да злучэньня з KL у пункце B, правядзем праз B простую, паралельную васі У, а праз M простую, паралельную васі X; пункт m перасячэньня апошніх простых і будзе пунктам, адпаведным пункту M па формулах (282) (Каардынаты пункту m будуць X, Y).

Сапраўды:

$$\frac{OP}{OL}=\frac{PM}{LB}=\frac{PM}{Pm} \quad \ldots\ldots \quad (283)$$

альбо

$$\frac{Y}{a}=\frac{x}{X};\ y=Y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (284)$$

Формулы (284) даюць:

$$x=\frac{XY}{a};\ y=Y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (285)$$

г. зн. залежнасьць паміж пунктамі (XY) і (xy), адпаведную (282).

Крывая C адносна крывой C_1 завецца яе *антыгіпэрболізмам.*

Зразумела, што і ператварэньне па формулах:

$$x=X;\ y=\frac{XY}{b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (286)$$

дае таксама гіпэрболізм крывой F(x,y)=O, толькі ў гэтым выпадку простая KL будзе паралельна восі оу.

Формулы *антыгіпэрболічнага* ператварэньня канечна будуць:

$$x=\frac{aX}{y};\ y=Y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (287)$$

альбо

$$x=X;\ y=\frac{aY}{X} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (288)$$

Разгледзім крывую 3-га парадку:

$$xy^2=a^2(2a-x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (289)$$

Гэтая крывая завецца *versiera d'Agnesi* альбо *pseudo-versiera (Loria, Biblioteca Mathematica, Texeira T. I p. 110).* (Аб гэтай-жа крывой успамінаў Гюйгэнс у сваім лісьце да Лейбніца ў 1674 годзе).

Ператворым раўнаньне (289) па формулах паралельнага пераноса

$$x = x' + 2a$$
$$y = y'$$

тады раўнаньне (289) прыме такі выгляд:

$$(x' + 2a) \cdot y'^2 = -a^2 \cdot x' \quad \ldots\ldots \quad (290)$$

А раўнаньне (290) ператворым па формулах антыгіпэрболічнага ператварэньня

$$x' = X$$
$$y' = \frac{aY}{X}$$

У канцы канцоў атрымаем такое раўнаньне:

$$X \cdot (X^2 + Y^2) + 2aY^2 = O \quad \ldots\ldots \quad (291)$$

раўнаньне *цысоіды Дыоклеса.*

Такім чынам, *цысоіда Дыоклеса ёсьць антыгіперболізм pseudo-versier'ы разгледжаны адносна пункту C (2a, o) і простай KL : x=a.*

§ 24. Подэра параболы адносну полюсу N, які ляжыць на восі параболы ў сярэдзіне паміж вяршыняй і фокусам яе, ёсьць цыркулярная крывая 3-га парадку, якая завецца *visiera d'Agnesi.*

Яе раўнаньне лёгка можа быць атрымана з агульнага раўнаньня подэр. [гл. I, § 24, раўнаньне (128)] $f = \frac{p}{4}$; $g = O$.

$$(2x + p)(x^2 + y^2) - \frac{p}{2} x^2 = O \quad \ldots\ldots \quad (292)$$

Знойдзем гіпэрболізм візіеры адносна простай

$$x + \frac{p}{8}.$$

Формулы ператварэньня будуць:

$$x = X$$
$$y = \frac{8XY}{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (293)$$

Пасьля падстаноўкі ў (292) выразаў x і y з (293) мы атрымаем:

$$(2X + p)(p^2 + 64Y^2) = \frac{p^3}{2} \quad \ldots\ldots \quad (294)$$

альбо

$$\left(X + \frac{p}{2}\right)(p^2 + 64Y^2) = \frac{p^3}{4} \quad \ldots\ldots \quad (295)$$

Ператварыўшы координаты па формулах:

$$X+\frac{p}{2}=X_1;\ Y=Y_1 \quad \ldots\ldots \quad (296)$$

Знойдзем:

$$X_1Y_1^2=\frac{p^2}{64}\left(\frac{p}{4}-X_1\right) \quad \ldots\ldots \quad (297)$$

г. зн. раўнаньне *versier'ы* [1]).

Такім чынам візіера ёсьць таксама антыгіпэрболізм вэрзіеры адносна простай $x=\frac{p}{8}$.

Пры дапамозе антыгіпэрболічнага ператварэньня з вэрзіеры можа быць атрыманы яшчэ цэлы шэраг крывых: ліст Дэкарта, anguinea і г. д., але яны не датычацца да нашай тэмы.

§ 25. У папярэдніх §§ гэтай работы ў якасьці прыкладаў, ілюструючых агульныя палажэньні, было ўказана шмат часных выглядаў цырк. крывых 3-парадку: цысоіды, строфоіды, трысэктрыса Маклорэна, офіурыда, візіера і так званыя фокалы.

Гэтыя часныя выгляды былі разглежаны значна раней, чымся была пабудавана агульная тэорыя цыркул. крывых.

Асабліва багатая літаратура, якая адносіцца да дзьвюх самых старых крывых гэтага тыпу цысоіды і строфоіды. Гэтыя-ж тыпы і найбольш цікавыя па сваіх уласьцівасьцях.

Больш-менш падрабязны разгляд уласьцівасьцяў часных выглядаў цырк. крывых занадта павялічыў-бы разьмеры гэтай працы.

З другога боку, тыя асобы, якія-б зацікавіліся гэтымі пытаньнямі, лёгка могуць знайсьці ўсе падрабязнасьці ў раней памянёных трактатах Texeira і Loria.

Гэтыя меркаваньні прымусілі нас некалькі зьмяніць намечаны раней плян V разьдзелу: нам здаецца больш метазгодным закрануць у ім пытаньні агульнага характару, распрацаваныя па крыніцах, мала даступных для чытачоў нашага Савецкага Саюзу.

Большасьць з іх мне ўдалося атрымаць у бібліотэках Нямеччыны, галоўным чынам, у Гэтынгэне.

---

[1]) Парамэтр a ў раўнаньні (289) тут раўны $\frac{p}{8}$

У апошніх §§ гэтага разьдзелу ўспомнім коратка аб тых часных выглядах цырк. крывых, якія яшчэ не сустракаліся вышэй.

§ 26. Звычайны спосаб пабудаваньня цысоіды Дыоклеса (гл. І. § 33) можа быць абагульнен наступным чынам:

Возьмем дзьве крывыя C_1 і C_2, якія ляжаць у аднэй роўніцы, і пункт О у тэй-жа роўніцы. Возьмем на кожнай з простых L, якія праходзяць праз пункт О, пункт М такі, што радыус вэктар ОМ роўны розьніцы

$$OM_2 - OM_1$$

радыусаў-вэктараў пунктаў M_2 і M_1, прамень L прасякаецца з крывымі C_2 і C_1. Геомэтрычным месцам пунктаў М будзе крывая, якая завецца *цысоідалей* крывых C_1 і C_2 адносна пункту О.

Зразумела, што калі зьмяніць ролі крывых C_1 і C_2, узяўшы

$$OM = OM_1 - OM_2$$

то атрымаем тую-ж крывую ў іншым палажэньні—сымэтрычную адносна пункту О з першай крывой.

З папярэдняга азначэньня выходзіць, што калі $F_1(\varsigma_1, \Theta) = O$ і $F_2(\varsigma_2, \Theta) = O$ полярныя раўнаньні крывых C_1 і C_2 адносна пункту О, як полюсу, то мы атрымаем полярнае раўнаньне цысоідалі C_1 і C_2, выключыўшы ς_1 і ς_2 з двох раўнаньняў гэтых крывых і ўмовы:

$$\varsigma = \varsigma_2 - \varsigma_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (298)$$

Напрыклад, калі C_2 будзе простая, паралельная восі OY, на адлегласьці 2a, то яе полярнае раўнаньне будзе:

$$\varsigma_2 = \frac{2a}{\cos\Theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (299)$$

Калі C_1 будзе акружынай, датычнай да восі OY, з цэнтрам у пункце (0,0) то яе полярнае раўнаньне будзе:

$$\varsigma_1 = 2a\cos\Theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (300)$$

Тады

$$\varsigma = \frac{2a}{\cos\Theta} - 2a\cos\Theta = \frac{2a\,sn^2\Theta}{\cos\Theta} \quad \ldots\ldots \quad (301)$$

полярнае раўнаньне *цысоіды Дыоклеса.*

Разгледзім цысоідалю простай:

$$x = c\ (C_2) \text{ і акружыны} \quad \ldots\ldots \quad (302)$$

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = O\ (C_1) \quad \ldots\ldots \quad (203)$$

У полярных коордынатах раўнаньне C_2 будзе:

$$\varsigma_2 = \frac{c}{\cos\Theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (304)$$

А раўнаньне (C_1):

$$\varsigma_1 = 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,.\cos(\varphi-\Theta) \quad \ldots\ldots \quad (305)$$

дзе $2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$—дыямэтр акружыны C_1, а φ—кут, які ўтварае дыямэтр гэтай акружыны, праходзячы праз полюс, з полярнай восьсю.

Раўнаньне цысоідалі, згодна з папярэднім, будзе:

$$\mathrm{Cos}\Theta\,.\,\varsigma = c - 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}(\cos\varphi\,.\cos\Theta + \mathrm{Sn}\varphi\mathrm{Sn}\Theta)\,.\cos\Theta \quad .\ (306)$$

Але $\mathrm{tg}\varphi = \frac{\beta}{\alpha}$; $\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$; $\mathrm{sn}\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$; $\cos\Theta = \frac{x}{\varsigma}$; $\mathrm{sn}\Theta = \frac{y}{\varsigma}$

Падставіўшы гэтыя выразы ў (306), атрымаем:

$$x = c - \frac{2(\alpha x+\beta y)}{\varsigma^2}\,.\,x \quad \ldots\ldots \quad (307)$$

Але $\varsigma^2 = x^2+y^2$, знач. раўнаньне цысоідалі ў канчатковай форме будзе:

$$(x-c)(x^2+y^2)+2(\alpha x+\beta y)\,.\,x = O \quad \ldots\ldots \quad (308)$$

Яна ёсьць *цыркулярная крывая 3 пар.* з падвойным пунктам у О.

Характар падвойнага пункту залежыць ад знаку дыскрымінанта:

$$\beta^2 - c(c-2\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (309)$$

Пры гэтым атрымліваюцца крывыя, якія разглядаліся ў § 22 гл. I.

Neuberg'ам указаны спосабы мэханічнага рысаваньня цысоідал у яго артыкуле: Sur quelques systèmes de tiges articulées, Liège 1886.

§ 27. Разгледзім адзін часны выпадак цырк. крывых, так званыя *конхоіды Sluse.*

Няхай АВ даная простая і О даны пункт (рысун. 84) знадворку яе. На кожным з прамяньняў ОС, якія праходзяць праз О, адкладзем ад пункту С, яго парасеку з простай АВ адрэзак CD так, каб

$$OC\,.\,CD = k^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (310)$$

k—некаторая сталая. Знойдзем геомэтрычнае месца пункту D, калі прамень ОС верціцца навокал О.

Возьмем пункт O за пачат. Дэк. простак. сыстэмы координат.

Лінію OB прымем за вось X.

Абсцысу пункту B азначым праз a.

Координаты пункту D абазначым праз (x, y). Раўнаньне простай OC будзе:

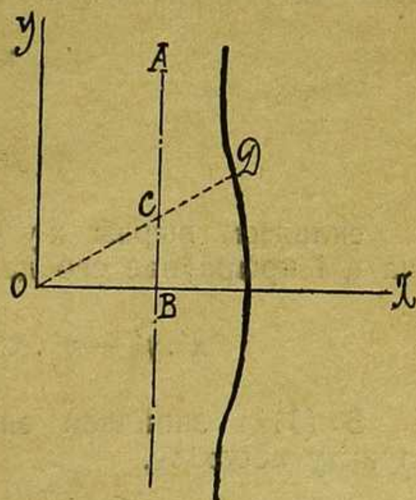
$$y = kx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (311)$$

Кооорд. пункту $C(a, ka)$;

$$OC = \sqrt{a^2 + a^2k^2} = a\sqrt{1 + k^2}$$

$$OD = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$CD = \sqrt{x^2 + y^2} - a\sqrt{1 + k^2};$$



Рыс. 84.

На падставе (310) пішам:

$$a\sqrt{1+k^2}\,.\left(\sqrt{x^2+y^2} - a\sqrt{1+k^2}\right) = k^2 \quad \ldots \quad (312)$$

Для знаходжаньня шуканага геомэтрычнаго месца трэба выключыць k з раўнаньняў (312) і (311).

Пасьля выключэньня атрымаем:

$$a(x-a)\,.\,(x^2+y^2) = k^2x^2 \quad \ldots\ldots \quad (313)$$

раўнаньне *конходы Sluse*. Аб гэтай крывой у першы раз успамінае Sluse ў сваім лісьце да Гюйгэнса [Oeuvres de Huyghens T. IV p. 246] і [Texeira T. I. § 31].

Ня цяжка атрымаць і полярнае раўнаньне конхоіды Sluse: O—яе полюс; OX полярная вось. Яно будзе:

$$\varsigma = \frac{a}{\cos\Theta} + \frac{k^2}{a}\cos\Theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (314)$$

Раўнаньне (314) можна палучыць альбо з (313) пераўтварэньнем координат, альбо вывесьці няпасрэдна.

Раўнаньне (313) паказвае, што конхоіда Sluse ёсьць цыркулярная крывая 3-га парадку з падвойным пунктам у пачатку координат.

Падвойны пункт у гэтым выпадку будзе ізоляваны.

Конхоіда Sluse мае два пункты перахілу. Для знаходжаньня іх па вядомаму правілу дыфэр. геомэтрыі, выра-

зіўшы координаты пунктаў крывой у выгляду функцый параметру t (падставіўшы y=tx ў (313)

$$x=a+\frac{k^2}{a(1+t^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (315)$$

$$y=at+\frac{k^2t}{a(1+t^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (316)$$

складзем выраз: $x'y''-y'.x''$, дзе „′“ азначае выводныя па t, і прыраўняе его да нуля.

$$x'.y''-y'.x''=\frac{2k^2}{a^2}\cdot\frac{k^2+a^2-3a^2t^2}{(1+t^2)^3}=O \quad . \quad . \quad . \quad (317)$$

З (317) знойдзем значэньне t, якое дае координаты пункту перахілу.

$$t^2=\frac{k^2+a^2}{3a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (318)$$

Пасьля падстаноўкі гэтага выразу t у раўнаньні (315) і (316) знойдзем:

$$x=\frac{4a(a^2+k^2)}{4a^2+k^2};\ y=\pm\frac{4(a^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}{(4a^2+k^2).\sqrt{3}} \quad . \quad . \quad . \quad (319)$$

Выключым з сыстэмы (319) k^2, г. зн. знойдзем геомэтрычнае месца пунктаў перахілу ўсіх конхоід, якія маюць тую-ж самую сапраўдную асымптоту (a—сталая).

Пасьля нескладаных перэтварэньняў знаходзім:

$$y^2=\frac{x^3}{4a-x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (320)$$

г. зн. атрымаем раўнаньне *цысоіды Дыоклеса*.

Атрымліваем гэткую тэорэму: *геомэтрычнае месца пунктаў перахілу конхоід Sluse, якія маюць супольную сапраўдную асымптоту і асаблівы фокус на восі OX (простай OB, пэрпэндыкулярнай да сапраўднай асымптоты) будзе цысоіда Дыоклеса.*

Калі будзем адкладаць адрэзкі CD (рысунак 85) у напрамку, адваротным OC, то атрымаем крывую, сымэтрычную з папярэдняй адносна AB. Яе раўнаньне проста атрымаем з (313), калі заменім у ім k праз ki:

$$a(x-a)(x^2+y^2)=-k^2x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (313a)$$

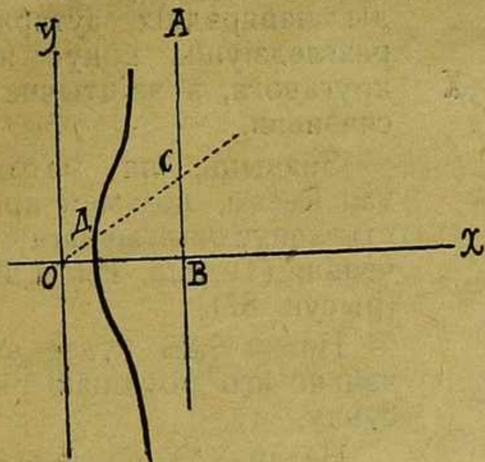
Гэтая крывая будзе, як і раней, мець ізоляваны пункт у пачатку коордынат, калі

$$a^2 > k^2$$

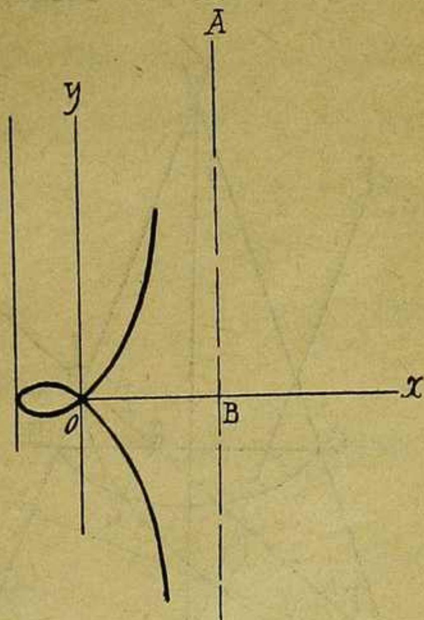
і вузлавы пункт, калі

$$a^2 < k^2$$

(Апошняя крывая нарысавана на рысунку (86).



Рыс. 85.



Рыс. 86.

Пры

$$k^2 = a^2$$

раўнаньне (813а) няпасрэдна пераходзіць у:

$$x(x^2+y^2)-ay^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (321)$$

г. зн. цысоіду Дыоклеса.

Зразумела, што конхоіды Sluse зьяўляюцца часным вытлядам цысоідал, якія разгледжаны ў § 27 гэтага разьдзелу.

Сапраўды раўнаньне цысоідалы (308) пры $\beta=0$ будзе мець форму:

$$(x-c).(x^2+y^2)+2\alpha x^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (322)$$

Для таго, каб гэтае раўнаньне было эквівалентна (313) альбо (313а) застаецца падабраць два астатніх яго парамэтры c і α так, каб здавальняліся ўмовы:

$$c = a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (323)$$

$$2\alpha = \mp \frac{k^2}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (324)$$

§ 28. У §§ 5 і 12 разьдзелу IV былі ўказаны ўласьцівасьці так званых фокальных крывых. Пакажам зараз спосаб іх атрыманьня, з якога зробіцца зразумелай і іх назва.

Уласьцівасьці, якія разглядаюцца ў гэтым §, былі атрыманы ў першы раз Casali, Quetelet і Dandelin'ам. Van Rees у сваім мэмуары, зьмешчаным у томе V Correspondance Mathématique, абагульніў досьледы папярэдніх аўтараў, разгледзіўшы конус некругавога, а эліптычнага сячэньня.

Значыць, па мэтоду van Rees'a, возьмем просты конус эліптычнага сячэньня (Texeira, T. I, p. 45) (рысун. 87).

Рыс. 87.

Няхай SAB будзе сячэньне яго роўніцаю рысунку.

Няхай YAX будзе роўніца, пэрпэндыкулярная да ASB, якая пройдзе праз простую AY, датычную да эліпса AB у пункце A. Гэтая другая роўніца дае ў сячэньні з паверхняй конусу конічнае сячэньне AEL, якога вось AL утварае з AS кут φ, і якога фокусамі будуць F і F_1.

Дапусьцім далей, што сякучая роўніца YAX верціцца навакол простай AY. Эліпс AEL будзе пры гэтым зьмяняцца, і яго фокусы апішуць пры гэтай зьмене ў роўніцы ASB некаторую крывую, якая завецца *фокалай van Rees'a*. (У выпадку кругавога конусу фокала завецца фокалай Quetelet).

Знойдзем раўнаньне фокалы van Rees'a.

Азначым кут ASO праз ς, а даўжыню вытваральнай SA праз l.

Знойдзем спачатку раўнаньне эліпса AEL, адносна васей AX і AY.

Азначым праз x i y координаты AK i EK пункту E гэтага эліпса, а праз a_1 і b_1 паўвосі асновы нашага конусу ASB.

Тады эліпс CED будзе падобны да эліпса, які ляжыць у аснове конусу, і мы можам напісаць

$$KE^2 = Y^2 = \frac{b_1^2}{a_1^2} . CK . KD \quad . \; . \; . \; . \; . \; (325)$$

Але з трыкутніка ACK, у якім кут ACK=90+ς, мы можем напісаць:

$$\frac{CK}{x} = \frac{\sin\eta}{\cos\varsigma} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (326)$$

Адкуль

$$CK = \frac{X . \sin\varphi}{\cos\varsigma} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (327)$$

Таксама з трыкутніка KLD знойдзем:

$$\frac{KD}{KL} = \frac{\sin(\varphi + 2\varsigma)}{\cos\varsigma} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (328)$$

Але KL=AL—X, а

$$\frac{AL}{l} = \frac{\sin 2\varsigma}{\sin(\varphi + 2\varsigma)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (329)$$

$$\text{Знач.: } AL = \frac{l . \operatorname{sn} 2\varsigma}{\sin(\varphi + 2\varsigma)}; \quad KL = \frac{l \sin 2\varsigma - X . \sin(\varphi + 2\varsigma)}{\sin(\varphi + 2\varsigma)} \quad . \; (330)$$

З (328) пры дапамозе (330) атрымоўваем:

$$KD = \frac{l \sin 2\varsigma - X . \sin(\varphi + 2\varsigma)}{\cos\varsigma} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (331)$$

Падставіўшы ў (325) замест CK і KD іх выразы з (327) і (331), мы атрымаем раўнаньне конічнага сячэньня AEL:

$$Y^2 . a_1^2 . \cos^2\varsigma = X . b_1^2 . \sin\varphi [l . \sin 2\varsigma - X \sin(\varphi + 2\varsigma)] \quad . \; (332)$$

Ператворым раўнаньне (332) у канонічную форму:

$$\left[X - \frac{l . \sin 2\varsigma}{2\sin(\varphi + 2\varsigma)}\right]^2 + \frac{Y^2 . a_1^2 \cos^2\varsigma}{b_1^2 . \sin\varphi . \sin(\varphi + 2\varsigma)} = \frac{l^2 . \sin^2 2\varsigma}{4\sin^2(\varphi + 2\varsigma)} \quad . \; (333)$$

Перанясем пачатак координат у цэнтр коніч. сячэньня

$$\left[\frac{l \operatorname{sn} 2\varsigma}{2\sin(\varphi + 2\varsigma)}, \; O\right]$$

тады раўнаньне (333) перапішацца такім чынам:

$$\frac{X_1^2}{\left[\frac{l \sin 2\varsigma}{2\sin(\varphi + 2\varsigma}\right]^2} + \frac{Y_1^2}{\frac{l . b_1^2 . \sin\varphi . \sin^2\varsigma}{a_1^2 . \sin(\varphi + 2\varsigma)}} = 1 \quad . \; . \; . \; (334)$$

З раўнаньня (334) бачым, што вялікая паўвось гэтага эліпса

$$a = \frac{l \,.\, \sin 2\varsigma}{2\sin(\varphi + 2\varsigma)}$$

Знойдзем с для гэтага эліпса

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{l^2 \,.\, \sin^2 2\varsigma}{4\sin^2(\varphi + 2\varsigma)} - \frac{l^2 \,.\, b_1^2 \,.\, \sin\varphi \,.\, \sin^2\varsigma}{a_1^2 \,.\, \sin(\varphi + 2\varsigma)}} =$$

$$= \frac{l \sin\varsigma}{a_1 \,.\, \sin(\varphi + 2\varsigma)} \,.\, \sqrt{a_1^2 \cos^2\varsigma - b_1^2 \,.\, \sin\varphi \,.\, \sin(\varphi + 2\varsigma)} \quad . \; (335)$$

Азначыўшы праз ρ і φ полярныя коордынаты пунктаў F і F_1 адносна сыстэмы з полюсам у пункце A і полярнай восьлю AS, мы можам напісаць раўнаньне шуканага геомэтрычнага месца пунктаў F і F_1 у такой форме:

$$\rho = \frac{l \,.\, \sin 2\varsigma}{2\sin(\varphi + 2\varsigma)} \pm \frac{l \sin\varsigma}{a_1 \sin(\varphi + 2\varsigma)} \,.\, \sqrt{a_1^2 \cos^2\varsigma - b_1^2 . \sin\varphi . \sin(\varphi + 2\varsigma)} \quad (336)$$

Пературым раўнаньне (336), узяўшы за полярную вось перпэндыкуляр, апушчаны на SB з пункту A. Азначыўшы праз ψ кут, утвораны новай восьсю з лініяй AL, знойдзем што

$$\psi = \frac{\pi}{2} - 2\varsigma - \varphi.$$

Знач.: $\varphi + 2\varsigma = \frac{\pi}{2} - \psi$

$\varphi = \frac{\pi}{2} - (\psi + 2\varsigma)$. Тады раўнаньне (336) перапішацца так:

$$\rho = \frac{l \sin 2\varsigma}{2\cos\psi} \pm \frac{l \sin\varsigma}{a_1 \cos\psi} \,.\, \sqrt{a_1^2 \cos^2\varsigma - b_1^2 \cos\psi \,.\, \cos(\psi + 2\varsigma)} \quad . \; (337)$$

Азначыўшы праз

$$\rho_1 = \frac{l \sin 2\varsigma}{2\cos\psi} - \frac{l \sin\varsigma}{a_1 \cos\psi} \,.\, \sqrt{a_1^2 \cos^2\varsigma - b_1^2 \,.\, \cos\psi \,.\, \cos(\psi + 2\varsigma)} \quad (338)$$

$$\rho_2 = \frac{l \operatorname{sn} 2\varsigma}{2\cos\varphi} + \frac{l \sin\varsigma}{a_1 \cos\psi} \,.\, \sqrt{a_1^2 \cos^2\varsigma - b_1^2 \cos\psi \,.\, \cos(\psi + 2\varsigma)} \quad (339)$$

атрымаўваем:

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{l \sin 2\varsigma}{\cos\psi} \quad . \; . \; : \; . \; . \; . \; . \; (340)$$

$$\rho_1 \,.\, \rho_2 = \frac{l^2 \,.\, b^2_1 \,.\, \cos(\psi + 2\varsigma)}{a_1^2 \,.\, \cos\psi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (341)$$

Значыцца ρ_1 і ρ_2 корані квадратнага раўнаньня:

$$\rho^2 - \frac{l\,\mathrm{sn}2\varsigma}{\cos\psi}\cdot\rho + \frac{l^2 . b^2{}_1 . \cos(\psi + 2\varsigma)}{a_1{}^2\cos\psi} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (342)$$

Раўнаньне (342) і будзе раўнаньнем шуканай *фокалы.*

Пераходзячы да Дэкартавых коордынат, атрымаем:

$$x(x^2+y^2) - 3l\sin\varsigma\cos\varsigma . (x^2+y^2) + \frac{l^2 b_1{}^2 . \mathrm{sn}^2\varsigma}{a_1{}^2}(x\cos2\varsigma -$$
$$- y\,\mathrm{sn}2\varsigma) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (343)$$

Раўнаньне (343) ёсьць раўнаньне фокалы ў Дэкартавай сыстэме коордынат, пачатак якой знаходзіцца ў пункце A, вось X пэрпэндыкулярна да вытваральнай конусу SB, а вось Y паралельна да ёй.

Калі конус ASB кругавы, г. зн. калі

$$a_1 = b_1$$

то фокала (343) пяройдзе ў *касую строфоіду*.

Калі конус пяройдзе ў цыліндр, то

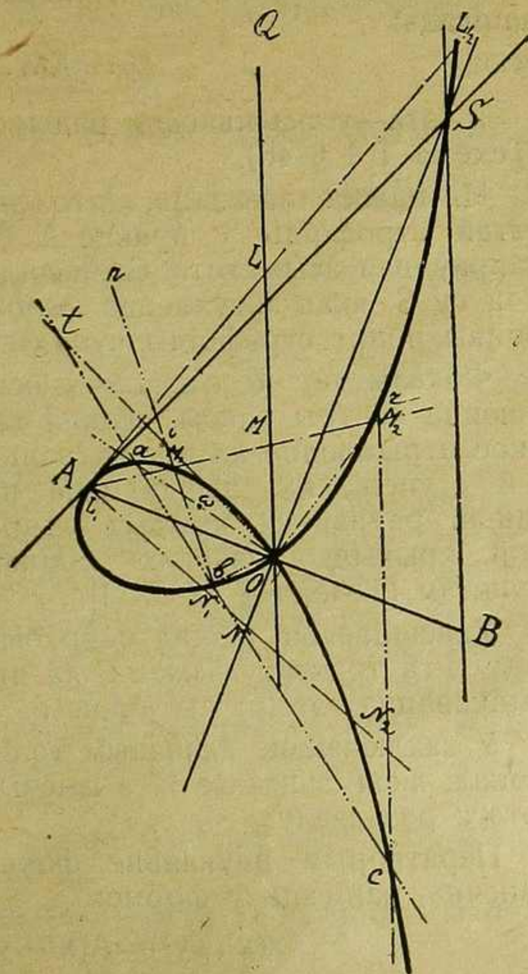
$$\varsigma = 0 \text{ альбо } \varsigma_1 = \frac{\pi}{2}$$

і фокала робіцца *простай строфоідай.* Яе раўнаньне будзе:

$$x(x^2+y^2) - 2a_1(x^2+y^2) + a^2x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (344)$$

Раўнаньне (344) супадае з раўнаньнем (73) § 11) разьдзелу 2-га і трэба ў ім толькі a замяніць праз $-a$.

Можна паказаць, што фокала кругавога конусу супадае з касой строфоідай, і на падставе геомэтрычных меркаваньняў (рысунак 88). Узяўшы



Рыс. 88.

напр. радыус-вэктар AM з трыкутніка AMO, знаходзім, што

$$\frac{AM}{AO}=\frac{\cos\varsigma}{\sin(\varphi+2\varsigma)},\ \frac{MO}{AO}=\frac{\cos(\varphi+\varsigma)}{\sin(\varphi+2\varsigma)}\ .\ .\ .\ ,\ (345)$$

(Азначэньні кутоў узяты з рысунку 87).

Узяўшы пад увагу, што раўнаньне фокалы (336) у выпадку $a_1=b_1$ можа быць перапісана гэтак:

$$\rho=\frac{l\sin2\varsigma}{2\sin(\varphi+2\varsigma)}+\frac{l\sin\varsigma\,.\cos(\varphi+\varsigma)}{\sin(\varphi+2\varsigma)}\ .\ .\ .\ .\ (346)$$

[з тэй прычыны, што $\sqrt{\cos^2\varsigma-\sin\varphi\sin(\varphi+2\varsigma)}=\cos(\varphi+\varsigma)$].

і што $AO=l\sin\varsigma$, мы з параўнаньня (345) і (346) можам напісаць:

$$\rho=AM+MO$$

а гэта—уласьцівасьць радыусу вэктару *касой строфоіды* [Texeira T I § 46].

Ня цяжка паказаць, што вытваральная SA датычна да гэтай строфоіды ў пункце A. Вытваральная SB ёсьць яе сапраўдная асымптота. Строфоіда праходзіць праз вяршыню конусу S, якая зьяўляецца галоўным пунктам крывой, падвойны пункт строфоіды супадае з пунктам O.

Фокалы van Rees'a, якія даюцца раўнаньнем (343) падзяляюцца на тры клясы, згодна характару кораняў раўнаньня, якое атрымаецца ад прыраўнаньня да нуля, таго многачлена 4-й ступені, які атрымаецца пад радыкалам пры разьвязаньні раўнаньня крывых адносна у: крывыя з аднэй галіной, крывыя з дзьвюма галінамі, і крывыя з падвойным пунктам [Texeira § 53. T. I].

Уласьцівасьці фокал падрабязна разгледжаны ў §§ 53—67 тому I-га трактату Texeira, да яго і адсылаем чытачоў, якія зацікавяцца гэтымі пытаньнямі.

У заключэньне адзначым толькі яшчэ адну ўласьцівасьць фокал, якая зьвязвае іх з цысоідалямі, разгледжанымі ў § 26 гэтага разьдзелу.

Перотворым раўнаньне фокал van Rees'a, якое можна, канечна, напісаць у форме:

$$x(x^2+y^2)=A(x^2+y^2)-Bx-Cy\ .\ .\ .\ .\ (347)$$

да полярнай сыстэмы каардынат:

$$\cos\Theta\,.\,\rho^2=A\rho-B\,.\cos\Theta-C\sin\Theta\ .\ .\ .\ .\ (348)$$

Прыняўшы сапраўдную асымптоту фокалы: $x - A = O$ альбо ў полярных коордынатах:

$$\rho = \frac{A}{\cos\Theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (349)$$

за крывую C_2, а самую фокалу за C_1, знойдзем раўнаньне іх цысоідалі.

Для гэтага трэба выключыць ρ_1 і ρ_2 з сыстэмы раўнаньняў:

$$\rho_1^2 . \cos\Theta = A\rho_1 - B\cos\Theta - C . sn\Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (350)$$

$$\rho_2 = \frac{A}{\cos\Theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (351)$$

$$\rho = \rho_2 - \rho_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (352)$$

З (352) : $\rho_1 = \rho_2 - \rho$, прымаючы пад увагу (351), знойдзем

$$\rho_1 = \frac{A}{\cos\Theta} - \rho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (353)$$

Пасьля падстаноўкі выразу ρ_1 з (353) у (350), знаходзім:

$$\frac{A^2}{\cos\Theta} - 2A\rho + \rho^2\cos\Theta = \frac{A^2}{\cos\Theta} - A\rho - B\cos\Theta - C\sin\Theta \ . \ (354)$$

Пасьля злучэньня падобных членаў ізноў атрымаўваем раўнаньне (348).

Адсюль маем наступную тэорэму: *фокала van Rees'а ёсьць цысоідаля для самой сябе і для сваёй сапраўднай асымптоты адносна свайго асаблівага фокусу.*

§ 29. Разгледзім у заключэньне некалькі задач, ілюструючых тэорыю, якая разважалася ў папярэдніх разьдзелах. Гэтыя задачы ўзяты намі з экзаменацыйных тэм, зьмешчаных у Revue des Mathématiques spéciales за 1905, 1906 і 1907 г.

Задача I. Просты кут а Or верціцца навокал падвойнага пункту цыркулярнай крывой. Праз пункт r, у якім адзін з бакоў кута сустракае крывую (рысун. 88), праводзяць простую rc, паралельную сапраўднай асымптоце цырк. крывой. Злучаюць *a* з *c* і азначаюць літараю b пункт перасеку простай *ca* з цыркулярнай крывой.

Знайсьці: 1) геомэтрычнае месца цэнтраў акружын, якія праходзяць праз пункты O, *a* і *b*.

2) месца проекцый падвойнага пункту O на простую *ac*,

3) абгортку простай *ac*.

Няхай раўнаньне данай цырк. крывой будзе:

$$x(x^2 + y^2) - (a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2) = O \quad . \quad . \quad . \quad (355)$$

Няхай кутавыя коэфіцыенты простых Oa, Ob і Oc будуць: t, Θ і t_1; кутавы коэф. Or ёсьць паводле ўмовы: $-\frac{1}{t}$

Раўнаньне акружыны, якая пройдзе праз пункты O, a і b, няхай будзе:

$$x^2+y^2-2ux-2vy=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (356)$$

t і Θ—корані раўнаньня:

$$2(u+vt)-(a_1+2b_1t+c_1t^2)=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (357)$$

альбо:

$$c_1 . t^2-2(v-b_1) . t+a_1-2u=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (358)$$

Знойдзем суадносіны, якія зьвязваюць t, Θ і t_1.

Няхай $mx+ny-1=O$ будзе раўнаньне простай abc.

Тры парамэтры t, Θ і t_1 будуць корнямі раўнаньня:

$$(1+t^2)-(a_1+2b_1t+c_1t^2) . (m+nt)=O \quad . \quad . \quad . \quad (359)$$

альбо:

$$c . n . t^3-(1-2b_1n-cm) . t^2+(a_1n+2b_1m) . t+a_1m-1=O . \quad (360)$$

Тады, азначыўшы праз S_1 S_2 і S_3 тры сымэтрычных функцыі кораняў раўнаньня (360), можам напісаць:

$$\begin{aligned} c . n . S_1&=1-2b_1n-cm \\ c . n . S_2&=a_1n+2b_1m \\ c . n . S_3&=1-a_1m \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (361)$$

Выключыўшы m і n з сыстэмы (361), атрымоўваем:

$$\begin{vmatrix} c, & cS_1+2b_1, & 1 \\ 2b_1, & a_1-cS_2, & 0 \\ a_1 & cS_3 & 1 \end{vmatrix} = O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (362)$$

Расчынім гэты дэтэрмінант, тады знойдзем:

$$2b_1 . c . S_3-a_1(a_1-cS_2)+c(a_1-cS_2)-2b_1(cS_1+2b_1)=O . \quad (363)$$

Але, на падставе раўнаньня (358):

$$\begin{aligned} t+\Theta&=\frac{2(v-b_1)}{c} \\ t . \Theta&=\frac{a_1-2u}{c} \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (364)$$

Тады мы можам напісаць:

$$\begin{aligned} S_1&=\frac{2(v-b_1)}{c}+t_1 \\ S_2&=\frac{2t_1(v-b_1)}{c}+\frac{a_1-2u}{c} \\ S_3&=\frac{a_1-2u}{c} . t_1 \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (365)$$

Калі падставім выразы S_1 S_2 і S_3 з (365) у (363), то мы атрымаем раўнаньне, якое дасьць нам t_1 у функцыі u і v:

$$a_1b_1c.\left[\frac{2(v-b_1)}{c}+t_1\right]+c(c-a_1).\left[\frac{2(v-b_1)}{c}.t_1+\frac{a_1-2u}{c}\right]-$$

$$-2b_1(a_1-2u).t_1+a_1(a_1-c)+4b_1^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad (366)$$

Пасьля раскрыцьця дужак і спрашчэньня:

$$[v(c-a_1)+2b_1.u].t_1+2b_1.v-u(c-a_1)=0 \quad . \quad . \quad (367)$$

Знойдзем зараз суадносіны, якія зьвязваюць t_1 і $\frac{1}{t}$.

Няхай $x=h$ будзе раўнаньне простай *cr*.

t_1 і $-\frac{1}{t}$ —корані раўнаньня:

$$h(1+t^2)-(a_1+2b_1t+c_1t^2)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (368)$$

альбо

$$(h-c).t^2-2b_1t+(h-a_1)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (369)$$

Але:

$$\frac{2b_1}{h-c}=t_1-\frac{1}{t}=\frac{tt_1-1}{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (370)$$

$$\frac{h-a}{h-c}=-\frac{t_1}{t}$$

Выключыўшы h з двох апошніх раўнаньняў, знойдзем:

$$2bt.(t+t_1)+(c-a_1)(t.t_1-1)=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (371)$$

Раўнаньне шуканага геомэтрычнага месца атрымаем, выключыўшы t і t_1 з раўнаньняў (357) (367) і (371)

З (371) знаходзім

$$t=\frac{c-a_1-2b_1.t_1}{2b_1+(c-a_1).t_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (372)$$

а замяніўшы t_1 яго выразам з (367), можам напісаць:

$$t=\frac{c-a_1+2b_1.\dfrac{2b_1v-(c-a_1).u}{2b_1u+(c-a_1).v}}{2b_1-(c-a_1).\dfrac{2b_1v-(c-a_1)u}{2b_1u+(c-a_1)v}}+\frac{v[4b_1^2+(c-a_1^2]}{u[4b_1^2+(c-a_1)^2]}=\frac{v}{u} \quad . \quad (373)$$

Калі падставім гэтае значэньне t у (357), атрымаем:

$$2u(u^2+v^2)-(a_1u^2+2b_1uv+cv^2)=0 \quad . \quad . \quad . \quad (374)$$

раўнаньне шуканага месца цэнтраў акружын праходзячых праз O, a і b.

Гэта *цыркулярная крывая*, гомотэтычная данай адносна яе падвойнага пункту. (Стасунак падобнасьці $= \frac{1}{2}$).

Раўнаньне (373) паказвае, што цэнтры акружын ляжаць на простай aO. Значыцца *Oa* ёсьць дыямэтр іх, і кут *oba* просты, г. зн. што ob перпэндыкулярна да *ac*.

З прычыны таго, што b ёсьць такім чынам проекцыя O на *ac*, то:

2) Геомэтрычнае месца проекцый O на ac ёсьць *сама цыркулярная крывая*.

3) Няхай $ux+vy-1=O$ будзе раўнаньне простай ab.

Раўнаньне мноства простых Oa, Ob і Oc будзе:

$$x(x^2+y^2)-(a_1x^2+2b_1xy+cy^2).(ux+vy)=O \quad . \quad . \quad (375)$$

З тэй прычыны, што Ob перпэндыкулярна да ab, то

$$\frac{x}{u}=\frac{y}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (376)$$

Адсюль атрымоўваем тангэцыйнае раўнаньне абгорткі

$$u(u^2+v^2)-(a_1u^2+2b_1uv+cv^2)(u^2+v^2)=O \quad . \quad . \quad (377)$$

альбо

$$a_1u^2+2b_1.uv+cv^2-u=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (378)$$

Гэта парабола, якой раўнаньне ў Дэкарт. коордынатах атрымаем пасьля выключэньня *u* і *v* з раўнаньня (378), і дзьвюх умоў, якія вызначаюць, што простая $.ux+vy-1=O$ датычна да параболы (378):

$$\frac{x}{2a_1u+2b_1v-1}=\frac{y}{2b_1u+2cv}=\frac{1}{u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (379)$$

З (379) знаходзім:

$$\begin{aligned}&(2b_1-y)u+2cv=O\\&(2a_1-x)u+2b_1.v-1=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (380)\\&x.u+y.v-1=O\end{aligned}$$

Апошняе раўнаньне ўзята замест (378):

Пасьля выключэньня u і v мы атрымоўваем:

$$\begin{vmatrix}2b_1-y, & 2c, & 0\\ 2a_1-x, & 2b_1, & 1\\ x, & y, & 1\end{vmatrix}=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (381)$$

Раскрыўшы гэты дэтэрмінант па элементах апошняй колёны, атрымаем:

$$y(2b_1-y)-2cx=2b_1(2b_1-y)-2c(2a_1-x) \quad . \quad . \quad (382)$$

альбо

$$(y-2b_1)^2+4.c(x-a_1)=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (383)$$

Гэта парабола з вяршыняй у пункце: $(a_1, 2b_1)$.

§ 30. Гэтую-жа задачу можна разьвязаць і геомэтрычным шляхам на падставе теорэмы Ekhardt'a.

1) Калі правядзем праз пункты a і b пучок акружын, то кожная акружына пучка ε сустрэне крывую яшчэ ў двох пунктах.

Простыя, якія пройдуць праз гэтыя пункты, перасякаюцца ў сталым пункце, які ляжыць на цырк. крывой.

Адсюль бачым, што калі акружына ε праходзіць праз пункты a, b, і O, то Or будзе датычнай да гэтай акружыны. Простая Oa (згодна з умовай задачы кут Oba просты) будзе дыямэтрам гэтай акружыны.

Цэнтр акружыны будзе знач. у пункце ω—сярэдзіне адрэзку Oa.

(Рысунак 88). Геомэтрычным месцам пунктаў ω будзе цыркулярная крывая гомотэтычная данай адносна падвойнага пункту ў стасунку 1 : 2.

2) Oa ёсьць дыямэтр круга Oab, b—проекцыя пункту O на ac, і месцам гэтай проекцыі будзе сама цыркулярная крывая.

3) Абгортка простай *ac* ёсьць антыподэра данай цыркулярнай крывой адносна пункту O. Гэта парабола, вось якой перпэндыкулярна да асымптоты крывой.

Гэта парабола датычна да нормаляў крывой у пункце *O* і да самай крывой у асновах перпэндыкуляраў, якія можна правесьці да яе з пункту O.

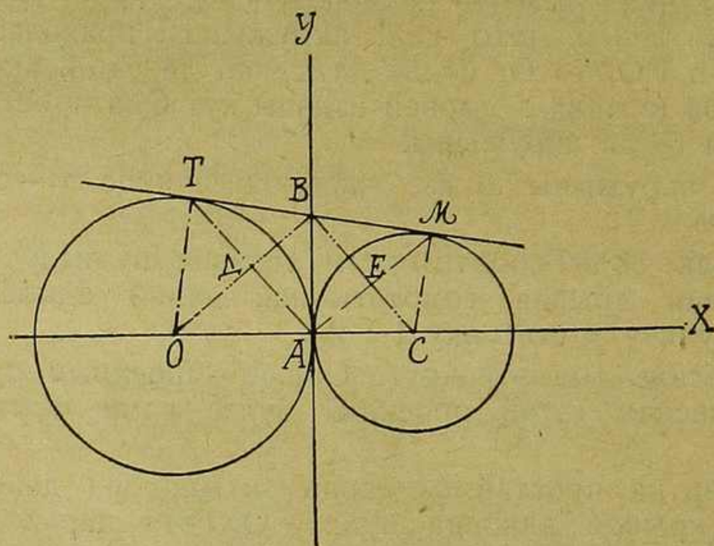
Можна пабудаваць гэтую параболу па пунктах, дапасоўваючы вядомае пабудаваньне датычных да подэр. Калі t (рысун. 88) ёсьць пункт дотыку *ac* і яе абгорткі, то нормаль да цырк. крывой *bn* у пункце *b* пройдзе праз сярэдзіну *i* адрэзку Ot. Пункт *t* атрымаецца як пункт перасеку простай *ac* і *Oi*, такі, каб кут *cOb* быў роўны куту ibO.

§ 31. *Задача 2-я.* Няхай нам дана акружына O. A— адзін з яе пунктаў. Разгледзім акружыну C, датычную ў пункце A да акружыны O, і правядзем супольную датычную да гэтых акружын TM. (Рысунак 89). Знайсьці геомэтрычнае месца пункту M, калі C зьмяняецца.

Геомэтрычнае разьвязаньне: Кут TAM просты [TB=BA==BM). Пункты T, A і M ляжаць на акружыне, якая мае цэнтр у пункце B. $\frac{TM}{2}$ яе радыус].

Адсюль вынікае, што OB паралельна AM, CB паралельна TA. З другога боку пункт B ляжыць на супольнай

датычнай да дзьвюх акружын у пункце A, значыцца, простая BC—пэрпэндыкуляр да OB у пункце B—абгортвае параболу, якая мае фокусам пункт O і датычнай у вяршыні—*AB*. Месца пункту ε ёсьць *подэра* гэтай параболы адносна пункту A. Гэта *простая цысоіда,* якая мае пункт A пунктам звароту і простую AC датычнай у гэтым пункце.



Рыс. 89.

Геомэтрычнае месца пунктаў M ёсьць цысоіда, гомотэтычная адносна пункту A у стасунку 1 : 2.

Гэта можна бачыць непасрэдна з рысунку 89. Геомэтрычнае месца пункту D ёсьць відавочна акружына, якая апісана на OA, як на дыямэтры. Калі будзем адкладаць на OB ад пункту O адрэзкі, роўныя DB, то, зразумела, атрымаем простую цысоіду (Дыоклеса).

З тэй прычыны, што AE роўна DB, геомэтр. месцам пункту E будзе такая-ж цысоіда, перасунутая на OA.

Аналітычнае разьвязаньне. Восі коордынат выбраны на рысунку 89.

Раўнаньне акружыны *O,* узяўшы OA=a, будзе:

$$x^2+y^2+2ax=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (384)$$

Раўнаньне зьменай акружыны C будзе, узяўшы AC=α:

$$x^2+y^2-2\alpha x=O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (385)$$

Азначым коордынаты пункту M праз x і y.

Датычная ў гэтым пункце да акружыны C будзе мець раўнаньне:

$$X(x-\alpha)+Yy-\alpha x=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (396)$$

дзе X і Y—бягучыя координаты.

Напішам умову, каб датычная (396) была датычнай і да акружыны O, тады атрымаем:

$$a^2[(x-\alpha)^2+y^2]-[a(x-\alpha)+\alpha x]^2=O \quad . \quad . \quad . \quad (387)$$

альбо, пасьля спрашчэньня:

$$a^2y^2-\alpha^2x^2-2a\alpha x(x-\alpha)=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (388)$$

Для атрыманьня раўнаньня шуканага геомэтрычнага месца дастатково выключыць α з раўнаньняў (385) і (388).

Зручней карыстацца раўнаньнем (387). З (385) мы маем:

$$(x-\alpha)^2+y^2=\alpha^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (389)$$

Падставім выраз левай часткі (389) у (387):

$$a^2\alpha^2-[a(x-\alpha)+\alpha x]^2=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (390)$$

Раўнаньне (390) распадаецца на два:

$$a\alpha+a(x-\alpha)+\alpha x=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (391)$$

$$a\alpha-a(x-\alpha)-\alpha x=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (392)$$

Першае дае для $\alpha=-a$, пасьля выключэньня атрымаем раўнаньне акружыны O. Другое дае для $\alpha=\frac{ax}{2a-x}$, і пасьля падстаноўкі гэтага выразу α ў раўнаньне (385) атрымоўваем раўнаньне *цысоіды Дыоклеса.*

$$x(x^2+y^2)-2ay^2=O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (393)$$

Задача 3-я. Дана строфоіда S.

Паказаць, 1) што акружыны, падвойна датычныя да гэтай крывой, падзяляюцца па дзьве сям'і і што хорды дотыку проходзяць праз два даных пункты;

2) пункты дотыку дзьвюх акружын аднае і тае-ж сям'і ляжаць на аднэй акружыне;

3) усякай акружыне аднае сям'і адпавядае адна і толькі адна акружына другое сям'і, якая датычна з ёю ў пункце на S;

4) паказаць, што датычныя ў двух іншых пунктах дотыку перасякаюцца на S і што простая, якая іх злучае абгортвае параболу;

5) паказаць, што простая, якая злучае падвойны пункт S з трецім пунктам перасеку S з хордай дотыку, пэрпэндыкулярна да гэтай простай;

Возьмем раўнаньне строфоіды ў парамэтрычнай форме:

$$x=\frac{at}{(1+t^2).(t-m)};\ y=\frac{at^2}{(1+t^2).(t-m)} \quad . \ . \ (394)$$

Раўнаньні (394) пасьля выключэньня t зьвернуцца ў раўнаньне цыркулярнай крывой 3-га парадку. Яе інвэрзійнае ператварэньне будзе раўнабочная гіпэрбола, што сьведчыць аб тым, што крывая (394) строфоіда (простая).

t пунктаў сустрэчы крывой p парадку з строфоідай зьвязаны суадносінамі:

$$t_1 . t_2 \ldots . t_{3p}=m^p \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (395)$$

Сапраўды, няхай крывая мае раўнаньне:

$$\varphi_p(x,y)+\varphi_{p-1}(x,y)+\ldots . +A=O \quad . \ . \ . \ . \ (396)$$

Раўнаньне, з якога знойдуцца t для пунктаў сустрэчы са строфоідой, ёсьць:

$$a^p . \varphi_p(1,t) . t^p+\ldots . a^{p-k}\varphi_{p-k}(1,t) . t^{p-k}(1+t^2)^k . (t-m)^k+\ldots .$$
$$\ldots . +A(1+t^2)^p . (t-m)^p=O \quad . \ . \ . \ . \ (397)$$

Парадак члена рангу (к+1) ёсьць (2p+k). Парадак расьце з рангам.

Член вышэйшага парадку:

$$A . t^{3p}$$

Сталы член будзе:

$$A(-m)^p$$

Значыцца

$$t_1 . t_2 \ldots . t_{3p}=(-1)^{3p}(-m)^p=m^p \quad . \ . \ . \ . \ (398)$$

Калі φ—простая : p=1 і суадносіны (398) будуць:

$$t_1 . t_2 . t_3=m.$$

Акружына злучаецца з строфоідай у пунктах J і J (іх парамэтры будуць адпаведна +i,—i) і яшчэ ў чатырох пунктах. Паміж значэньнямі t, адпавядаючымі гэтым пунктам, будзе наступная залежнасьць:

$$t_1 . t_2 . t_3 . t_4=m^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (399)$$

I. Няхай t_1 і t_2 адпавядаюць пунктам дотыку падвойна датычных да S акружын, то мы будзем мець:

$$t_1^2 . t_2^2=m^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (400)$$

З (400) няпасрэдна вынікае, што ёсьць дзьве сям'і падвойна датычных акружын, якія адпавядаюць:

$$t_1 . t_2=+m$$
$$t_1 . t_2=-m \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (401)$$

Хорды дотыку сустракаюць строфоіду S у двух іншых пунктах, адпавядаючых значэньням t_3 і t'_3 такім, што

$$t_1 . t_2 . t_3 = m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (401)$$

$$t_1' . t_2' . t_3' = m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (403)$$

Значыцца:

$$t_3 = 1$$

$$t_3' = -1.$$

Але $\frac{dy}{dx} = \frac{t^4 - t^2 + 2mt}{2t^3 - mt^2 + m}$; для $t = \pm 1$ $\frac{dy}{dx} = m$ . . . . (404)

Хорды строфоіды праходзяць праз два сталых пункты—пункты дотыку датычных, паралельных сапраўднай асымптоце крывой: (m—кутовы коэф. сапраўднай асымптоты крывой S).

2°. Няхай $(t_1 t_2)$ і $(t_3 . t_4)$ адпавядаюць пунктам дотыку дзьвюх акружын аднае і тое-ж сям'і.

Гэтыя чатыры пункты ляжаць на аднэй акружыне, бо

$$t_1 . t_2 = t_3 . t_4 = \pm m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (405)$$

г. значыцца: $t_1 . t_2 . t_3 . t_4 = m^2$ . . . . (406)

3° і 4°. Праз пункт адпаведны t праходзіць акружына кожнай сям'і, няхай t_1 і t_1'—два іншых пункты дотыку; тады

$$t . t_1 = m$$

$$t . t_1' = -m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (407)$$

Значыцца

$$t_1 = -t_1'$$

Датычныя ў пунктах t_1 і t_1' перасякаюцца ў пункце Θ на S з тэй прычыны, што

$$t^2{}_1 . \Theta = m$$

$$t_1'^2 . \Theta = m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (408)$$

Але мы маем з (407):

$$t_1 = \frac{m}{t}$$

$$t_1' = -\frac{m}{t}$$

Значыцца, аднародныя коордынаты пунктаў t_1 і t_1' будуць:

$$x_1 = at^2; \; y_1 = amt; \quad z_1 = (t^2 + m^2)(1 - t) \; . \; . \; . \; (409)$$

$$x_1' = at^2 \; y_1' = -amt; \; z_1' = (t^2 + m^2) . (1 + t) \; . \; . \; (410)$$

Раўнаньне простай, якая злучае гэтыя пункты (у звычайных коордынатах) будзе:

$$yt^4 + m(my - x + a)t^2 - m^3 x = O \quad . \; . \; . \; . \; (411)$$

Яе абгорткай будзе парабола

$$(x+my)^2-2a(x-my)+a^2=O \quad . \ . \ . \ . \ (412)$$

Раўнаньне (412) надта лёгка атрымліваецца з раўнаньня (411) і выводнага ад яго на t пасьля выключэньня парамэтра t.

5°. Простая $t_1 . t_1'$ сустракае S у пункце Θ, прычым

$$t_1 . t_1' . \Theta = m.$$

Адсюль: $\Theta = \frac{m}{t_1 . t_1'}$, але з (401) мы можам замяніць t_1 і t_1' іх выразамі праз t, тады атрымаем, што

$$\Theta = -\frac{t^2}{m}$$

Θ—будзе коэфіцыентам простай, якая злучае падвойны пункт S з пунктам Θ. Тое-ж самое атрымоўваем, вылічыўшы координаты пункту Θ па формулах (394), калі заменім у іх парамэтр t праз яго значэньне, якое адпавядае пункту $\Theta = -\frac{t^2}{m}$; Дэкартавы координаты падвойнага пункту крывой S будуць (0,0). Па гэтых даных ня цяжка напісаць раўнаньне простай, якая злучае пункт Θ з падвойным пунктам S, і знайсьці потым яе кутавы коэфіцыент. Атрымаем тое-ж самае значэньне: $-\frac{t^2}{m}$. Кутавы коэфіцыент простай $t_1 t_1'$ лёгка знойдзем з яе раўнаньня (411), ён будзе роўны:

$$\frac{m}{t^2}$$

Адсюль і вынікае, што простая $t_1 t_1'$ і простая, якая злучае пункт Θ з падвойным пунктам строфоіды, узаемна пэрпэндыкулярны.

Геомэтрычны разьвязак. Супольныя хорды акружыны і цыркулярнай крывой EB і FD сустракаюць крывую ў пунктах A і C, прычым простая AC паралельна сапраўднай асымтоце крывой.

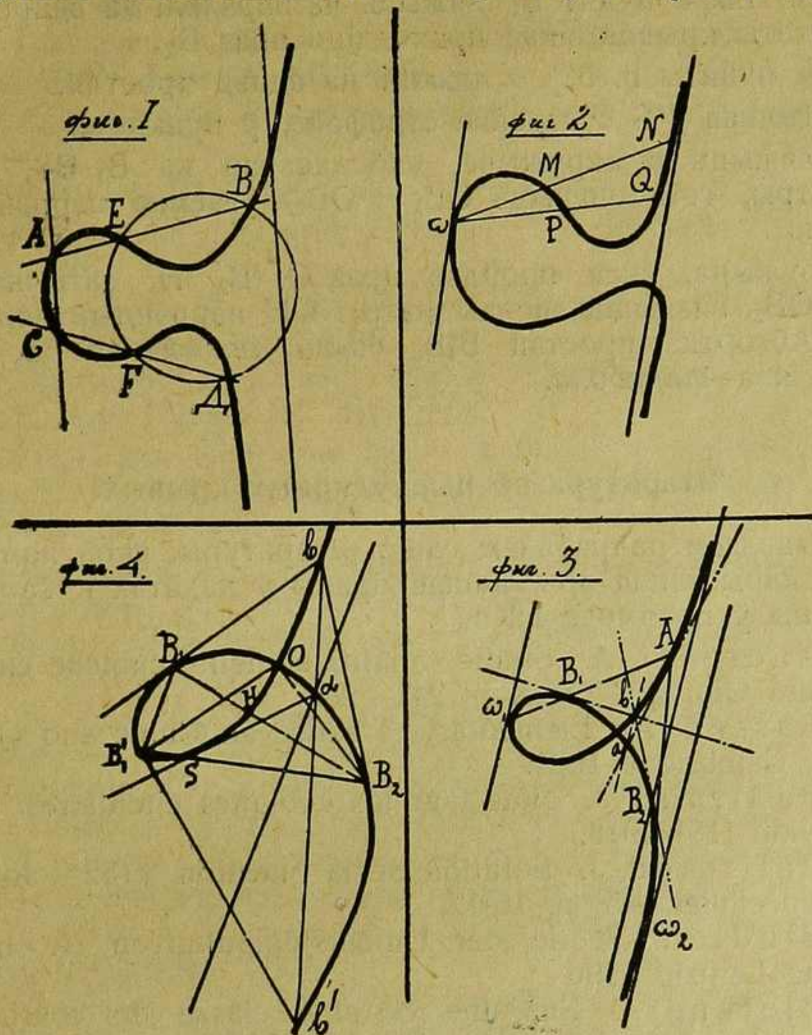
Для падвойна датычных акружын абедзьве хорды сальлюцца і A і C сальлюцца з пунктам дотыку датычнай, паралельнай асымптоце (рысунак 90).

Наадварот, калі ω ёсьць такі пункт, то дзьве сякучыя, якія праводзяцца з яе (фіг. 2), сустрэнуць крывую ў чаты-

рох пунктах: M_1 N_1 P і Q_1 якія распаложаны на аднэй акружыне.

Значыцца, існуе акружына падвойна датычная да крывой ў пунктах P і Q.

Для строфоіды ёсьць дзьве датычныя паралельныя яе сапраўднай асымптоце. Няхай ω_1 і ω_2 іх пункты дотыку



Рыс. 90.

(фіг. 3). Ёсьць, значыцца, дзьве сям'і падвойна датычных акружын. Хорды дотыку праходзяць праз пункты ω_1 і ω_2.

У пункце A датыкаюцца акружыны 1-ае і 2 сям'і.

Датычныя ў двох іншых пунктах дотыку B_1 і B_2 перасякаюцца на крывой S.

Сапраўды, датычныя ў пунктах ω_1 B_1 і A сустрэнуць крывую S у трох іншых пунктох, якія ляжаць на аднэй простай (§ 9 гл. I). Значыцца, датычная ў пункце B_1 сустракае крывую S у пункце ƀ, які ляжыць на паралелі да сапраўднай асымптоты, праходзячай праз пункт a.

Таксама датычная ў пункце B_2 пройдзе праз пункт ƀ (фіг. 4). Няхай пункт B_1' ляжыць на паралелі да сапраўднай асымптоты крывой, якая праходзіць праз B_1.

Тры пункты ƀ, ƀ′ і α ляжаць на аднэй простай.

Датычная ў S сустракае строфоіду ў пункце α.

O ляжыць на акружыне, пабудаванай на B_1 B_2', як на дыямэтры, гэта значыць OB_1' і OB_2—узаемна пэрпэндыкулярныя.

Акружына, якая пройдзе праз O, B_2, H, датычная да OB_1'. OB_2, значыцца, яе дыямэтр і OH пэрпэндыкулярна да B_1B_2. Абгортка простай B_1B_2 ёсьць *антыподэра* S, і значыцца, яна—*парабола*.

Літаратура аб цыркулярных крывых.

Прывядзем падрабязны сьпіс літаратуры, якой нам прышлося карыстацца пры нашай працы ў дадатак к таму, які паказаны ў прадмове да яе.

1. Andreasi A. Studio analitico delle cubiche cicliche. Battaglini Giornale TXXX p. 241—286.

2. Basset. An Elementary Treatise an Cubic and Quartic Curves. Cambridge 1901.

3. Balitrand J. Note sur les cubiques circulaires. Nouv. Ann. Math (18) 1918.

4. Balitrand J. Solution de la question „152“ Jour. de Math. spécialies 4(5) p. 16-17.

5. Bindler. Teorie der Unicursalplankurven 4. bis 3. Ordnung Leipzig 1896.

6. Bjerkness. Sur une certaine classe de courbes de 3 ième degré Journ. de Crelle Bd. LX 1858.

7. Bricard. Sur les propriétés métriques d'une correspondance entre les cubiques focales, Bull. Soc. Math de France 28, 1900.

8. Casey J. On Bicircular Qnartics, Transactions of the Royal Jrish Academy Vol. 24, 1871 p. 457—569.

9. Cardoso Laynes. Una generalizazzione delle cubiche circolari, Period. mat. inseg. sec. Livorno (15) 1899 p. 64—66.

10. C y a n e J e a n Etudes sur les cubiques circulaires Journ. de. Malh. spéc. (2) 1899.

11. C o t t y G. Sur les cubiques circulaires. Reveude Math spéciales. (18) p. 561—563.

12. C z u b e r. Die Kurven 3 und 4. Ordnung welche durch die unendlichfernen Kreispuncte gehen. Zeitschrift für Math und Physik Bd. 32. S 257.

13. C a z a m i a n A. Sur une lieu geometrique et ses applications. Nouv. Ann (3) XII 1893.

14. C a z a m i a n A. Question „414" J. de Math Jpéc (4)(5) p. 117—19.

15. D i s t e l i. Die Metrik der Circularkurven 3 Grades. Vierteljahrbericht der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich Bd. 36, 1891.

16. D o e h l e R. Orthogonale Jnvarianten der circularkurven 3. Ordnung. Jena 1895.

17. D u r è g e. Über eine leichte Construction... Zeitschrift für Math. und Physik Bd. XIV 1869.

18. D u r è g e. Über eine Kurve 3. Ordnung welche den gemetrischen Ort der Brennpuncte einer Kegelschnittschar bildet Math. Ann. Bd 5, S 83.

19. E m c h A. An Jntroduction to Projective Geometry and its applications. New-Jork 1905, p. 204—216.

20. E l g é. Une theorème sur les cubiques circulaires Journ. de Math. spéciales (4) 1896 p. 6-7.

21. E c k h a r d t. Über die Kurven 3. Ordnung, Zeitschrift für Math. und Physik Bd. X. 1866.

22. E m c h. On a certain generation of rational circular curves. Amer. Math. Soc. Bull. (25) 1919, p. 397—404.

23. F r i e k e F. Über ebene Kurven 3. Ordnung welche durch die unendlichfernen Kreispuncte hindurchgehen, Gotha 1898.

24. G a n g u l i S. Lectures of the theorie of plane curves. Calcutta 1919. Kap. XIX.

25. G a e d e k e W. Über die Fusspunctkurven der geraden Kissoide. Arch. der Math. und Physik (3)(28) 1919-1920, S. 82—85,

26. G a e d e k e W. Über polarreziproke Transformation einer Eigenschaft der schiefen Kissoide. Arch. d. Math und Physik 3. (28). S. 191-192.

27. H e r m e s O. Über gewisse Kurve des 3. Grades. Crelle Journal Bd. 97, 1884. S. 177.

28. H i l t o n H. Plane Algebraic Curves, Oxford, 1920.

29. J e ř á b e k V. O zvláštni circulárni křivce stupně třetího. Výročni zpráva vyšší Realne Ŝkoly v Brně. 1901.
30. J e r a b e k V. Sur les coniques qui se touchent en deux points donnés. Mathesis (2)(6) p. 37—41.
31. K u p p e r H. Об его работе (о постр. цир. кривых) упоминается в заметке Schoute под № 53.
32. K o l d r o s. Generalisalions de theorèmes de Steiner L'Enseignement Mathematique, 4-5-6—1928.
33. L a g u e r r e. Ouevres T. 2 Sur les courbes cataspiriques.
34. L a g r a n g e. Sur les cubiques strophoidales, Nouv Ann. (3) 19, p. 6667.
35. L e m o i n e, Sur les coubiques nodales circulaires. Nouv. Ann. Math. (4), 1904.
36. L o r i a. Specielle Algebraische Kurven.
37. M a g n u s Sammlung von Aufgaben aus der Analytischen Geometrie Berlin 1833.
38. M a t h e w s, A general construction for circular cubics Amer. Math. Society Bull. (29)8 1923.
39. M i n e u r A. Cubiques anallagmatiques, Brüssel, J. van Dijl, 1928. (lithograph).
40. M i r m a n L. sur la cissoïde Dioclès, Nouv Ann. (3) IV. (p. 372—374).
41. M o r l e y T. On the geometry of a nodal circular cubic.
42. M ü l l e r Konstruction der Fokalkurven aus sechs gegebenen Puncten. Zeitschrift für Math. und Physik (40) 1895. S. 337—352.
43. N e u b e r g. Sur quelques systèmes de tiges articulées. Ziège 1886.
44. P e l z. Über das Problem der Glanzpuncte Sitzungber. d. Wiener Akademie Bd. 64. S. 730.
45. P e s c h k e A. Zur geraden Strophoïde und zur Maklorinschen Trisectrix, Arch. d. Math u. Ph. (3)28.
46. P l e s s i s. Solution de composition de Mathématiqus 1919-1920. Concours de l'Ecole Polytechnique en 1901. Nouv. Ann. de Math. (1), 1901 (p. 565—575).
47. R e t a l i. Concours de l'Ecole Normale Supérieure en 1901. Nouv. Ann. de Math. (1), 1901, (p. 224—231).
48. R e t a l i. Sur une cubique circulaire. Mathesis (2), 9, 1899, (p. 87—89).
49. R i b a u c o u r. Mémoire sur les courbes envellopes de cercles. Nouv. Corr. Math. Août 1871, p. 257.
50. R u f f i n i F. R. Pedali delle coniche, Bologna Mem. (5) II (p. 123—132).

51. Rougié M. Note sur les cubiqnes spéciales. Revue de Math. spéc. (16) p. 465-466.

52. Salmon. Courbes planes T. 2. Paris, 1884.

53. Schoute P. H. Crelle Journal Bd. 99. Заметка по поводу статьи Hermes'a.

54. Schoute P. H. Over ligging der enkelvoudige brandpuncten einer circulare kubische kromme. Verst. Ak. Amst. (5), 1896, S. 261—269.

55. Schoute P. H. Sur la construction des courbes unicursales. Archives néerlandaises T XX 1885 et 1887.

56. Schröter. Über eine besondere Kurve 3. Ordnung Math. Ann. Bd. 5. S. 50.

57. Schröter. Die Focale mit einem Doppelpunct. Math. Ann. Bd. 5. S. 85.

58. Servais Cl. Sur les cubiques nodales circulaires. Nouv. Ann. Math. (3) VIII (p. 197—203).

59. Strnad Alois. O circulárních křivkách stupně třetího. Výrocni zpráva vyšších, škol realných v Hradci Králové 1883.

60. Texeira G. Traité de courbes spéciales remarquables Coimbra 1909 T. I.

61. Texeira G. Sur une propriété générale de cubiques circulaires unicursales. Nouv. Ann. Math. (4)(16), 1916.

62. Texeira G. Sur une manière de construire les cubiques circulaires. Nouv. Ann. Math. (4), 16, 1916 (p. 449—454).

63. Uven van M. J. Quelques remarques sur la strophoïde oblique. Archives du Musée Teylor (2), 8, (p. 1—12).

64. Wileitner. Specielle Ebene Kurven. Leipzig 1908.

65. Wolstenholme J. Circular cubics which are the inverse of a lemniscate. London Math. Soc. Bull. VII (p. 91—100).

RÉSUMÊ.

Le présent ouvrage a pour but d'étudier systematiquement les propriétés des courbes circulaires du 3-ième degré.

On y discute l'equation génerale de la courbe circulaire et on y montre les méthodes qui réduisent la dite équation en formes simples.

Dans le premier chapitre sont étudiées les propriétés de cubiques circulaires au moyen de théorème d'Ekhardt qui donne les propriétés de droites qui joignent les points d'intersection de cubique avec le faisceau de cercles dont les centres sont situés aussi à la cubique.

On profite ici des méthodes de signifisations abrégées.

On donne ensuite des méthodes pour la construction des cubiques circulaires au moyen de faisceaux projectifs de cercles et de droites.

Dans cette partie du mémoir sont considérés en détail trois espèces de faisceaux de cercles et examinés les problèmes de l'influence du caractère du faisceau de cercles à l'espèce de la cubique obtenue.

On a donné des figures détaillées pour chaque cas particulier.

On discute la théorie de cubiques circulaires qui ont le point double en connexion avec le problème de podaires.

On démontre le théorème nommé „de Casey": „chaque courbe circulaire est l'enveloppe de cercles bitangents dont les centres sont situés sur les paraboles".

Ce théorème est démontré par une méthode purement analytique employée par M. Darboux, et d'oú sont obtenues beaucoup de conséquences: on énonce quatre séries de cercles bitangents et on reçoit de la doctrine précédènte des conclusions de trois espèces de points doubles de cubiques.

Dans la plupart des cas nous avons donné les nouvelles demonstrations de théorèmes connus.

Dans la 2-ième chapitre est donnée la théorie générale d'inversion et est consideré le rôle de cette théorie pour les cubiques circulaires.

On démontre ici en dètail la théorie de foyers de cubiques, les théorèmes de Hart et la théorie de transformations anallagmatiques. La dernière théorie est discutée très en détails avec beaucoup d'exemples.

Dans ce chapitre on montre aussi les propriétés de cubiqes circulaires liées avec les triangles autopolaires de pôles d' inversion et avec le cercle des neuf points d'Euler.

En conclusion est donnée la nouvelle démonstration du théorème de Casey et applications du dit théorème aux cubiques. La plupart de ces demonstrations est aussi donnée ici pour la première fois.

Le 3-ième chapitre est consacré à l'étude de propriétés projectives de cubiques. On montre ici le théorème connu: les cubiques circulaires peuvent représenter la perspective de toutes les cubiques et on discute les résultats de ce théorème.

Dans la conclusion de ce chapitre est donnée la nouvelle démonstration du théorème connu de Salmon: „le rapport anharmonique de quatre tangents de courbe du 3-ième degré est constant".

On discute les cas particuliers de ce rapport en connexion avec les invariants de la forme biquadratique de M. Clebsch.

Das le 4-ième chapitre on discute les propriétés métriques des cubiques étudiées.

Toute la matière de ce chapitre est entièrement nouvelle. Ce chapitre est le sommaire du memoire.

On obtient ici cinq invariants orthogonaux independants de cubiques circulaires et on en recoit les propriétés diverses de ces cubiques.

De ces cinq invariants, on en obtient quelques nouveaux, et on leur donne des formules canoniques.

On discute aussi les faisceaux de cubiques ciculaires et on en obtient les conditions, d'après lesquelles la cubique donnie dégénère en un cercle et en une ligne droite, ou en trois lignes droites.

On donne ces conditions en forme de determinants du 3-ième degré.

Au moyen d'invariants sont aussi donnés quelques théorèmes qui discutent le problème de cubiques particulières (spéciales) dans le faisceau de cubiques circulaires générales: le nombre de cubiques focales, de cubiques avec un point double, de courbes dégénérées etc.

Comme conclusion de ce chapitre est donnée la série de théorèmes relatifs aux lieux géométriques de foyers singuliers de cubiques du faisceau dont les centres sont dans les six

sommets du quadrilatère complet général et du quadrilatère dont les côtés opposés sont perpendiculaires. Les derniers théorèmes étaient donnés par Müller par les méthodes de géomètrie synthétique,

Dans le dernier chapitre on discute de nouveau les problèmes de construction des cubiques.

On y donne la classification des méthodes de cette construction: la méthode générale de lieux géomètriques et ses cas spéciaux: le cas de faisceaux projectifs, de roulement de paraboles, de droites qui sont en rotation autour de deux points immobiles.

Dans le V ième chapitre sont données aussi les méthodes intéressantes de construction de cubiques dues à Mm.: Servais, Jerabek et Casey dont on y a obtenu de nouvelles démonstrations.

Dans la deuxième partie du chapitre sont données diverses méthodes de transformations géomètriques pour obtenir les cubiques circulaires en partant de courbes plus simples: ce sont la méthode d'antinversion et celle d'inversion générale, la méthode de transformations de Maclaurin et de Newton, au moyen desquelles on obtient les cubiques circulaires comme dérivées de cercles et d'autres courbes.

A la fin du mémoire sont considerés trois exemples qui se rattachent aux théories précédentes.

З а ў в а г і.

Вядома, што інвэрзійнае ператварэньне цыркулярнай крывой 3-га парадку Г дае ізноў цырк. крывую 3-га парадку Г', калі полюс інвэрзіі ляжыць на 1-ай крывой. [Глава II § 15 стар. 84].

Гэтыя дзьве крывыя Г і Г', праходзячы праз кругавыя пункты роўніцы, будуць мець яшчэ сем супольных пунктаў.

Пакажам, што тры з гэтых пунктаў ляжаць на нейкай простай, а чатыры на акружыне, якая мае свой цэнтр у полюсе інвэрзіі.

Няхай полюс інвэрзіі О будзе на крывой Г. Прымем яго за пачатак координат Дэк. сыстэмы, тады раўнаньне крывой Г будзе:

$$(ax+by).(x^2+y^2)+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=O \quad . \quad . \; (1)$$

У полярнай сыстэме яно зьвернецца ў гэткае:

$$\rho^2(a\cos\varphi+b\operatorname{sn}\varphi)+\rho(A\cos^2\varphi+B\operatorname{sn}\varphi\cos\varphi+C\operatorname{sn}^2\varphi)+(D\cos\varphi+ +E\operatorname{sn}\varphi)+O.$$

Полярнае раўнаньне крывой Г' будзе, калі абазначым

$$\rho\,.\,r=k^2$$

$$k^4(a\cos\varphi+b\operatorname{sn})\varphi+k^2\,.\,r(A\cos^2\varphi+B\operatorname{sn}\varphi\,.\,\cos\varphi+C\operatorname{sn}^2\varphi)+ +r^2\,.\,(D\cos\varphi+E\operatorname{sn}\varphi)=O$$

Значыцца раўнаньне крывой Г' у Дэкартавай сыстэме будзе:

$$(Dx+Ey).(x^2+y^2)+k^2(Ax^2+Bxy+Cy^2)+k^4(ax+by)=O \; . \; (2)$$

Памножыўшы (1) на k^2 і адняўшы ад (2), мы атрымаем:

$$(Dx+Ey).(x^2+y^2-k^2)-k^2(ax+by)(x^2+y^2-k^2)=O \quad . \; (3)$$

альбо:

$$(x^2+y^2-k^2).[Dx+Ey-k^2(ax+by)]=O \quad , \; . \; . \; (4)$$

Раўнаньне (4) ёсьць раўнаньне крывой, якая праходзіць праз пункты перасеку крывых (1-й) і (2-й).

Але крывая (4) распадаецца на акружыну: $x^2+y^2-k^2$ і простую: $(D-ak^2)x+(E-bk^2)y=O$

Сыстэма раўнаньняў (1) п. (2), эквівалентна (1) і $(D-ak^2)x+$ $+(E-bk^2)y=O$, якая дае тры пункты на простай, і сыстэме: (1) і $x^2+y^2-k^2=O$, якая дае шэсьць пунктаў, у гэтым ліку, J і j, на акружыне: $x^2+y^2-k^2=O$ [Journal de Math. Spéciales 5. 1896. p. 6-7. M. Elgé].

Адзін спосаб азначэньня роўніцы.

(Адменьнік угрунтаваньня геомэтрыі).

Ч. Дамброўскі.

I. Тэрміны агульнай тэорыі мностваў, ужываныя далей.

Калі мы гаворым аб мностве m прадметаў P, тады аб кожным прадмеце P мы гаворым, што ён належыць да мноства m, або што ён зьяўляецца элемэнтам мноства m; аб самым-жа мностве m мы гаворым, што яно праходзіць праз прадмет P, або мае элемэнт P.

Калі кожны элемэнт мноства m належыць да мноства n, тады мы гаворым, што m заключаецца ў n, або што n заключае m.

Калі які-небудзь прадмет P належыць адначасова да мностваў m і n, тады мы гаворым аб мностве m, што яно перасякае мноства n у прадмеце P.

Сумай мностваў m і n мы называем мноства ўсіх прадметаў, з якіх кожны належыць прынамсі да аднаго з мностваў m і n.

——

II. Азначэньні першапачатковых паняцьцяў геомэтрыі.

1. Мы называем ляжачым у парадку ABC кожны з прадметаў A, B, C, для якіх устаноўлена сувязь, якая здавальняе наступныя 3 патрабаваньні:

A. Парадак ABC несумяшчальны з парадкам BCA (3-я аксыёма Вэблна).

B. Парадак ABC цягне за сабою парадак CBA (2-я аксыёма Вэблна).

C. Калі мы назавем прасталінійна распалажанымі або колінэарнымі (collineari, alignés) прадметы A, B, C, з якіх кожны ляжыць прынамсі ў адным з парадкаў ABC,

АСВ, ВАС, ВСА, САВ, СВА,—і калі прадметы А, В, С колінэарны і прадметы А, В, Д таксама колінэарны, прычым Д розна ад С, тады і прадметы С, Д, А колінэарны (6-я аксыёма Вэблна).

2. Мы назавем конгруэнтнай неўпарадкаванай пары прадметаў (А, В) (або (В, А)) неўпарадкаваную пару прадметаў (С, Д) (або (Д, С)), калі для гэтых пар устаноўлена сувязь, якая здавальняе наступным 3 патрабаваньням:

А. Калі пара (А, В) конгруэнтна пары (С, Д) і пара (Е, Ф) конгруэнтна пары (С, Д), тады пара (А, В) конгруэнтна пары (Е, Ф).

В. Калі кожны з прадметаў B', D', E' ляжыць у парадку B' D' E' або B' E' D', або D' ідэнтычна з E'; кожны з прадметаў A', D', C' ляжыць у парадку A' D' C' або D' ідэнтычна з C', але A' розны ад C'; пара (А, В) конгруэнта пары (A', B'), а таксама пары (B', E'); пара (В, С) конгруэнтна пары (B', C'); тады пара (А, С) ня можа быць адначасова конгруэнтна пары (A', C') і пары (E', C').

С. Калі кожны з предметаў В, А, Б ляжыць у парадку ВАБ або ў парадку ВБА; кожны з прадметаў W', A', B' ляжыць у парадку W' A' B' або W' B' A'; пара (W', A') конгруэнтна пары (В, А); пара (W', B') конгруэнтна пары (В, Б); пара (W', C') конгруэнтна пары (В, Ц); пара (B', C') конгруэнтна пары (Б, Ц); тады пара (A', C') контруэнтна пары (А, Ц). (Постулят Вэронэзэ—Мольлеруппа).

3. Мы назавем (часова) клясай АБ колінэарных прадметаў нейкага роду (элемэнтаў нейкай больш абшырнай клясы) мноства, да якога належаць два розныя адзін ад аднаго прадметы А, Б, а таксама ўсе прадметы Х данага роду, з якіх кожны з прадметамі А, Б просталінійна распаложаны (азн. 1, патрабаваньне С.), і не належаць ніякія іншыя прадметы.

4. Мы назавем (часова) паўплоскай клясай А'р прадметаў нейкага роду мноства, да якога належаць усе элемэнты Х нейкай клясы р колінэарных прадметаў данага роду, якая (кляса р) не праходзіць праз нейкі элемэнт А, а таксама ўсе прадметы У данага роду, з якіх кожны ляжыць у парадку АХУ,—і не належаць ніякія іншыя прадметы.

5. Мы назавем кантам паўплоскае клясы А'р прадметаў нейкага роду клясу р колінэарных прадметаў данага роду.

6. Мы назавем (часова) плоскім пучком ав клясаў колінэарных прадметаў нейкага роду мноства, да якога належаць толькі ўсе клясы с колінэарных прадметаў данага

роду, з якіх кожная (кляса с) праходзіць праз супольны элемэнт В розных адна ад аднэй клясаў а і в колінэарных прадметаў данага роду, і перасякае якую-небудзь клясу к колінэарных прадметаў данага роду, якая (кляса к) у сваю чаргу перасякае а і в у розных адзін ад аднаго прадметах.

7. Мы назавем (часова) плоскай клясай ав прадметаў нейкага роду суму ўсіх клясаў с колінэарных прадметаў данага роду, з якіх кожны належыць да плоскага пучка ав клясаў колінэарных прадметаў данага роду.

8. Мы называем ляжачым між А і С прадмет В, які ляжыць у парадку АВС.

9. Мы называем (адцягненай эўклідавай трохмернай) прасторай усякае мноства р, якое здавальняе наступныя 7 патрабаваньняў:

А. Да мноства р належаць прынамсі 4 розных адзін ад аднаго прадметы, якія не належаць ані да аднае і тае самае клясы колінэарных элемэнтаў р, ані да аднае і тае самае плоскае клясы элемэнтаў мноства р.

В. Калі прадметы А, В, С, Д належаць да мноства р, прычым А розны ад В, а С ад Д, тады да мноства р належыць прадмет Е, які ляжыць у парадку СДЕ, розны ад Д і такі, што пара прадметаў (А, В) конгруэнтна пары (Д, Е).

С. Калі прадметы А, В належаць да мноства р і розны адзін ад аднаго, і калі разаб'ем клясу АВ колінэарных элемэнтаў мноства р на такія дзьве групы, што ніводзін элемэнт аднае з гэтых груп не ляжыць між двума элемэнтамі іншай групы, тады да клясы АВ і да мноства р належыць прынамсі адзін такі прадмет Ф, які не ляжыць між ніякімі двума элемэнтамі аднае і тае самае групы. (Постулят Дэдэкінда).

D. Калі А, В, С неколінэарныя элемэнты мноства р; D належыць да мноства р і ляжыць між А і В; Е, А, В, С належаць да аднае і тае самае плоскае клясы элемэнтаў мноства р; D розны ад Е; ані Е, ані які-б там ні было элемэнт мноства р, колінэарны з D і Е, не ляжыць між А і С і не ідэнтычны ані з А, ані з В, ані з С; тады да мноства р належыць элемэнт Ф, колінэарны з D і Е або ідэнтычны з D або з Е і адначасова ляжачы між В і С. (Постулят ПАШа).

Е. Калі А, В, С, D, Е элемэнты мноства р, А розна ад В, D ад Е і С ад А і В, і пара (А, В) конгруэнтна пары (D, Е), тады да ўсякае паўплоскае клясы элемэнтаў мноства р, кант якой праходзіць праз D і праз Е, належыць такі прадмет Ф, што пара (А, С) конгруэнтна пары (D, Ф) і адначасова пара (В, С) конгруэнтна пары (Е, Ф).

F. Калі p праходзіць праз 3 розныя неколінэарныя прадметы, тады p праходзіць і праз такія 3 розныя неколінэарныя прадметы A, B, C, што калі a абазначае клясу BC колінэарных элемэнтаў мноства p, b—клясу AC колінэарных элемэнтаў мноства p, і c—клясу AB колінэарных элемэнтаў мноства p,—тады да плоскага пучка ab клясаў колінэарных элемэнтаў мноства p належыць ня больш за адну клясу колінэарных элемэнтаў мноства p, якая не перасякае c. (Постулят Эўкліда-Рыманна).

G. Дзьве розныя адна ад аднэй плоскія клясы прадметаў, якія маюць адзін і толькі адзін супольны элемэнт, ня могуць адначасова заключацца ў аднэй і тэй самай клясе p. (Постулят нечатырохмернасьці).

10. Мы называем пунктам і ўсе элемэнты нейкае прасторы p_0.

11. Мы называем простай усякую клясу AB колінэарных пунктаў, калі A і B—пункты.

12. Мы называем паўроўніцай усякую паўплоскую клясу A'p пунктаў, калі A—пункт, а p—простая.

13. Мы называем роўніцай ab усякую плоскую клясу ab пунктаў, калі a і b—простыя.

14. Мы называем адрэзкам AB мноства, да якога належаць толькі пункты A і B і ўсе пункты X, з якіх кожны ляжыць у парадку AXB.

15. Мы называем паўпростай AB мноства, да якога належаць толькі два розныя адзін ад аднаго пункты A і B і ўсе пункты X, з якіх кожны ляжыць у парадку AXB або ABX.

16. Мы называем роўным адрэзку CD адрэзак AB, калі пара пунктаў (A, B) конгруэнтна пары пунктаў (C, D).

17. Мы называем выпуклым кутом ABC мноства ўсіх паўпростых BD, з якіх кожная перасякае адрэзак AC, калі A, B, C неколінэарныя пункты.

18. Мы называем роўным выпукламу куту DEF выпуклы кут ABC, калі магчыма гэтак выбраць пункты D, F, A і C, каб пара (A, B) была конгруэнтна пары (D, E), пара (B, C)—пары (E, F) і пара (C, A)—пары (F, D).

19. Мы называем прылеглымі два выпуклых куты ABC і CBD, калі B ляжыць між A і D.

20. Мы называем паўпоўным кутом суму двух прылеглых кутоў.

21. Мы называем пачаткам паўпростай AB пункт A.

22. Мы называем поўным кутом мноства ўсіх паўпростых, якія заключаюцца ў аднэй і тэй самай роўніцы і маюць супольны пачатак.

23. Мы называем пасьлядоўнымі два куты, калі яны здавальняюць наступныя 3 патрабаваньні:

А. Два пасьлядоўныя куты заключаюцца ў адным і тым самым поўным куце.

Б. Два пасьлядоўных куты маюць прынамсі адну супольную паўпростую.

В. Два пасьлядоўных куты ня могуць мець больш за адну супольную паўпростую.

24. Мы называем угнутым кутом суму двух пасьлядоўных выпуклых кутоў, калі гэтая сума не зьяўляецца ані выпуклым, ані паўпоўным кутом.

25. Мы называем пасьлядоўнымі тры куты а, в, г, калі а і в—пасьлядоўныя куты і в і г—пасьлядоўныя куты (азн. 23).

26. Мы называем кутавым полем а суму ўсіх паўпростых, якія належаць да кута а.

27. Мы называем роўным нявыпукламу куту а нявыпуклы кут в, калі а і в зьяўляюцца сумамі кожны двух або кожны трох пасьлядоўных выпуклых кутоў і апошнія адпаведна роўны ў а і ў в.

III. Цяпер мы давядзем, што наша сыстэма 27 азначэньняў дастаткова для вываду з яе ўсяе эўклідавае геомэтрыі.

Каб вывесьці асноўныя лінійныя тэорэмы ПАШа, давядзем спачатку, што:

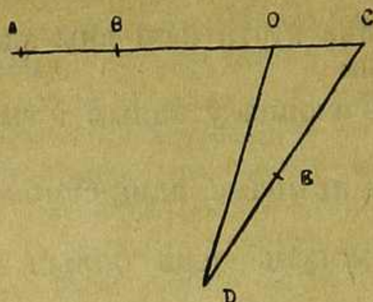
1. Калі А і В (два пункты) ляжаць на адным баку пункту О (г. ё. ёсьць парадак ОАВ або ОВА), а В і С на розных бакох пункту О (парадак ВОС), тады О ляжыць між А і С, або пункты А і С ляжаць на розных бакох пункту О.

2. Калі А і В ляжаць на адным баку пункту О, В і С таксама на адным баку пункту О, тады і А і С ляжаць на адным баку пункту О.

3. Калі А і В ляжаць на розных бакох пункту О, В і С таксама на розных бакох пункту О, тады А і С ляжаць на адным баку пункту О.

На самай справе, па-першае, аналёгічныя тэорэмы адносна „бакоў“ простай даведзены ў ПАШа (гл. „Vorlesungen über neuere Geometrie“, 2-ое выданьне, Лейпцыг 1926, выд. Ю. Шпрынгэра, § 2, стар. 20—26) на падставе такой самай

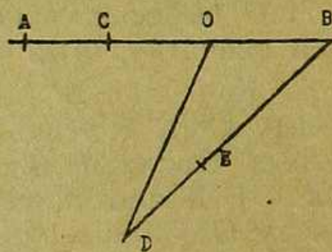
аксыёмы. Цяпер хай A і B ляжаць на адным баку пункту O, B жа і C на розных бакох пункту O. Тады на аснове 9A існуе ў p_0 пункт D, неколінэарны з ніводнай парай пунктаў з чацьверкі A, B, C, O. Простая DO існуе паводле азначэньня простай (усёроўна, з якіх элемэнтаў яна складаецца—прынамсі-ж з D і O). Між C і D існуе пункт E (гл. Oswald Veblen, A system of axioms for geometry, ap. Transactions of the American Mathematical Society, July 1904, стар. 355, TH. 6). Пункты C і E ляжаць тады на адным баку простай OD, B і C на розных. Значыцца, пункты B і E ляжаць на розных бакох OD, бо E неколінэарна з B і C. Але E неколінэарна і з A і B, апошнія-ж ляжаць на розных бакох OD. Але A, E і C неколінэарны, і C і E ляжаць на адным баку OD. Значыцца, A і C ляжаць на розных бакох OE. Тады O ляжыць між A і C, што і трэба было давесьці.



Рыс. 1.

Другую тэорэму мы лёгка давядзем шляхам прывядзеньня да недарэчнасьці.

Калі-ж, па-трэцяе, A і B ляжаць на розных бакох пункту O, B і C таксама на розных бакох пункту O, тады возьмем пад увагу існуючы паводле 9A пункт D, неколінэарны з A і O, і такі пункт E, каб быў парадак BED. Тады E неколінэарна з A і B, і B і E ляжаць на адным баку простай OD, A жа і B на розных бакох гэтае простай OD. Значыцца, A і E ляжаць на розных бакох простай OD. Але таксама давядзем, што C і E ляжаць на розных бакох простае OD. З прычыны таго, што лёгка бачыць, што (на падставе 1C) A, C і E неколінэарны, дык A і C павінны ляжаць на адным баку простай OD (Паш), а значыцца, і на адным баку пункту O.



Рыс. 2.

Цяпер мы можам давесьці 4, 5, 7 і 8 „Kernsätze“ ПАШа.

З 1C лёгка выводзіцца, што з адвольных трох пунктаў простай заўжды адзін ляжыць між двума іншымі; і з прычыны таго, што пункты, аб якіх мова ідзе ў 4, 5, 7 і 8

„Kernsatz“ Паша, ёсьць пункты аднае простай паводле 1С, дык для іх правільна наступная тэорэма:

Калі адзін з іх В не ляжыць між А і С, і С не ляжыць між В і А (унутры адрэзку ВА), і калі яны розны адзін ад аднаго, тады А ляжыць між В і С.

Хай цяпер мы маем парадкі АМС і АСВ. Калі-б А і М ляжалі на розных бакох пункту В, тады паводле вышэй даведзенага С і М ляжалі-б на розных бакох пункту В, значыцца, В і М ляжалі-б на адным баку пункту С, значыцца, А і М ляжалі-б на розных бакох С.

Калі-ж бы В і М ляжалі-б на розных бакох пункту А, тады і С і М ляжалі-б на розных бакох пункту А. Значыцца, 4 „Kernsatz“ Паша даведзены.

5 „Kernsatz“ Паша гаворыць: Калі С—унутраны пункт адрэзку АВ, а Д—унутраны пункт адрэзку АВ, розны ад С, але Д не зьяўляецца ўнутраным пунктам адрэзку АС, тады Д ёсьць унутраны пункт адрэзку ВС.

На самай справе, калі-б В і С ляжалі-б на адным баку пункту Д, тады з прычыны таго, што А і С ляжаць на адным баку Д, дык, паводле даведзенага, А і В ляжалі-б на адным баку пункту Д.

7 „Кэрнзац“: Калі В—унутраны пункт адрэзку АС, а таксама адрэзку АД, і С розны ад Д, тады альбо С—унутраны пункт адрэзку АД, альбо Д—унутраны пункт адрэзку АС.

На самай справе, калі-б С і Д ляжалі-б на розных бакох пункту А, дык з прычыны таго, што В і С ляжаць на адным баку А, дык В і Д ляжалі-б на розных бакох пункту А.

8 „Кэрнзац“: Калі В—унутраны пункт адрэзку АС, А—унутраны пункт адрэзку ВД, тады А—унутраны пункт адрэзку СД, В—унутраны пункт адрэзку СД.

На самай справе, калі-б С і Д ляжалі-б на адным баку пункту А, дык з прычыны таго, што С і В ляжаць на адным баку пункту А, дык В і Д ляжалі-б на адным баку пункту А.

Калі-б С і Д ляжалі-б на адным баку пункту В, тады з прычыны таго, што А і С ляжаць на розных бакох пункту В, дык А і Д ляжалі-б на розных бакох пункту В.

Гэткім чынам лінійныя асноўныя тэорэмы Паша, а значыцца, і ўвесь першы разьдзел „Vorlesungen“ вынікаюць з нашае сыстэмы азначэньняў.

IV. Мэтрычная геомэтрыя.

Тэорэма 1. Калі кожнаму адрэзку АВ нейкае клясы адрэзкаў адпавядае такі адрэзак СД, што АВ роўны адрэзку СД, тады ўсякі адрэзак данае клясы роўны сам сабе. („Рэфлексыўнасьць“ роўнасьці адрэзкаў).

На самай справе, напішам два разы:

АВ = СД;
АВ = СД.

Тады паводле 16 і 2А будзе АВ=АВ, што і трэба было давесьці.

Тэорэма 2. Усякі адрэзак, які заключаецца ў прасторы, сам сабе роўны (роўнасьць адрэзкаў у прасторы рэфлексыўна).

На самай справе, паводле 9В і 16 выпаўнены ўмовы тэорэмы 1.

Тэорэма 3. Калі адрэзак АВ роўны адрэзку СД, тады таксама СД роўны адрэзку АВ. Довад гэтае тэорэмы вядомы з „Асноў“ Гільбэрта. Але тутака невялічкая модыфікацыя. З прычыны таго, што мова ідзе аб адрэзках, якія заключаюцца ў прасторы, дык:

СД = СД;

Але:

АВ = СД.

Значыцца паводле 2А:

СД = АВ,

што і трэба было давесьці.

Тэорэма 4. Усякі выпуклы кут роўны сам сабе.

Тэорэма 5. Калі выпуклы кут а роўны выпукламу куту в, тады в=а.

Тэорэма 6. Азначэньне роўнасьці выпуклых кутоў (гл. 2С) адназначна.

Гэтыя тэорэмы даводзяцца надта лёгка на падставе вышэй даведзенага.

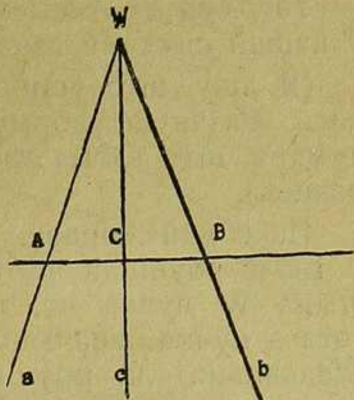
——

V. Плоскі пучок простых.

Тэорэма. Калі с і д—дзьве простыя аднаго і таго самага пучка аb, тады існуе простая, якая перасякае а, b, с і д.

На самай справе, калі с належыць да пучка аb, дык гэта значыць, што існуе простая е, якая перасякае а, b і с

у трох пунктах A, B, C, розных ад супольнага пункту W простых a, b, c, д. З пунктаў A, B, C адзін ляжыць між двума іншымі. Калі гэта C, дык узяўшы ў простай д адвольны пункт Д, які ў ёй існуе на падставе азначэньня простай, і пункт D', у парадку ДWD', які ў гэтай-жа простай існуе на падставе 9B і 1C, разгледзім трыкутнік ДAD'. Паводле 9D, з прычыны таго, што пункты B і C належаць разам з Д, A, D' да роўніцы ab, дык простая b, а таксама простая c перасякаюць або адрэзак ДA, або адрэзак D' A. Калі b перасякае ДA у пункце E, дык узяўшы трыкутнік EBA, з прычыны таго, што E, B, A, W належаць да роўніцы ab, убачым ізноў паводле 9D, што тады c перасякае AE; значыцца, простая ДE перасякае a, b, c і д. У адваротным выпадку мы зразумела тое-ж самае скажам аб простай D' E. Таксама мы давядзем нашу тэорэму ў выпадку, калі з пунктаў A, B, C адзін з двух першых ляжыць між двума іншымі.



Рыс. 3.

Хаця мы давялі вышэй, што існуе простая, якая перасякае a, b, c і д, але нам дастаткова будзе карыстацца толькі фактам, што ўсякая простая плоскага пучка ab належыць да пучка ac, г. ё. што існуе простая, якая перасякае a, c і д, і што ўсякая простая плоскага пучка ac належыць да пучка ab, што вынікае з даведзенага, бо мы выходзім толькі з факту, што існуе простая, якая перасякае a, b і c.

Вынік 1. Калі c—простая плоскага пучка ав, тады пучкі ав і ac ідэнтычны.

Цяпер наша тэорыя разгортваецца зусім аналёгічна тэорыі „аднасечнасьці“ дзьвюх простых (гэта будзе пытаньне аб „аднасечнасьці“ простай і роўніцы), у чым яе асаблівая цікавасьць у параўнаньні з тэорыямі Пэано і Вэблна.

Тэорэма 2. Калі c і д—розныя простыя плоскага пучка ав, тады плоскія пучкі ав і сд ідэнтычны.

На самай справе, тады паводле тэор. 1 гэтага разьдзелу і паводле выніку 1 пучок ав ідэнтычны як з пучком ac, ігэтак і з пучком ад, значыцца, пучкі ac і ад ідэнтычны простая д належыць да пучка ac. Але тады—ізноў паводле выніку 1—калі д ёсьць простая пучка са (ac), дык пучкі са і сд ідэнтычны; значыцца, пучок сд ідэнтычны са, або ac,

а апошні, як мы бачылі, ідэнтычны пучку ав; значыцца, пучкі ав і сд ідэнтычны, што і трэба было давесьці.

Тэорэма 3. Аксыёма 1_6 Гільбэрта вынікае з тэорэмы 2 у нашай сыстэме азначэньняў.

(Я лічу, што ўсім тэорэмам трэба было-б даваць гэткую вось лёгічную форму; тады менш схільны былі-б пэдагогі думаць, што гэтыя тэорэмы здатны для маладога ўзросту дзяцей).

На самай справе, хай простая а мае супольныя пункты А і В з роўніцай вс. Калі адзін з гэтых пунктаў ёсьць вяршыня W пучка вс, тады простая а ёсьць адна з простых гэтага пучка, значыцца, усе яе пункты належаць, паводле азначэньня, да роўніцы вс. У адваротным выпадку прыналежнасьць пунктаў А і В да роўніцы вс азначае паводле азначэньня іх прыналежнасьць да аднае або дзьвёх простых d', d'' пучка вс. Калі гэта адна простая, дык яна зразумела (з прычыны „аднасечнасьці“ дзьвёх простых) ідэнтычна а, і мы маем першы выпадак, вышэй заналізаваны. Калі d' розна ад d'', тады паводле тэорэмы 2 пучок d'd'' ідэнтычны пучку вс, значыцца, і роўніца d' d'' ідэнтычна роўніцы вс. Але ў пучку d' d'' простая а ёсьць „дырэктрыса“, г. ё. яе пункты разам з вяршынёю W пучка азначаюць простыя гэтага пучка, значыцца, усе гэтыя пункты належаць да роўніцы d' d'', г. ё. вс, што і трэба было давесьці.

Далейшая тэорыя роўніцы разгорнута ў Паша і тутака можа разгортвацца зусім таксама.

VI. Роўнасьць трыкутнікаў і кутоў.

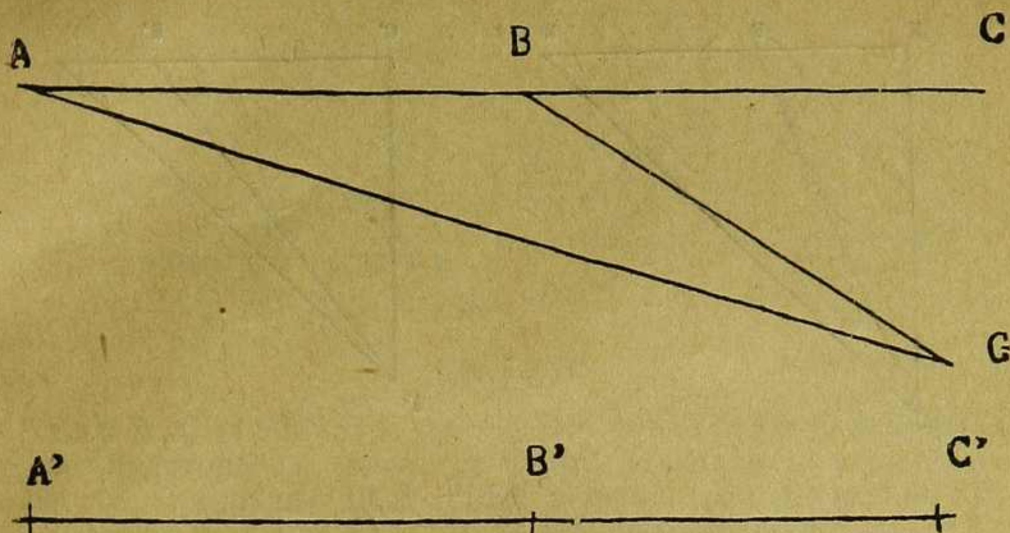
У нас няма аксыёмы III_3 Гільбэрта. Вось як яна ў мяне выводзіцца з 9Е і 2С пры дапамозе іншых:

Калі адрэзак АВ роўны адрэзку А' В', а адрэзак ВС роўны адрэзку В' С', і ёсьць парадкі АВС і А' В' С' (рыс 4), тады паводле 9А у прасторы p_0 ёсьць пункт па-за простай АВ, а значыцца, у p_0 заключаецца паўроўніца з кантам АВ. Тады паводле 9Е у гэтай паўроўніцы ёсьць такі пункт G, што адрэзкі:

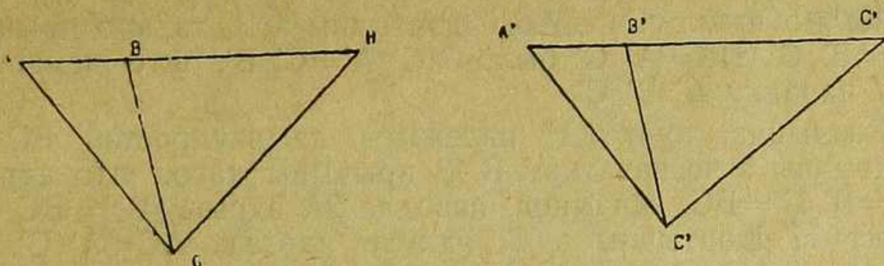
$$AG = A'\ C';$$
$$BG = B'\ C'.$$

На падставе 9В у паўпростай АС ёсьць такі пункт Н (рыс. 5), што адрэзак:

$$AH = A'\ C'.$$



Рыс. 4.



Рыс. 5.

На падставе 2C адрэзак HG=C' C'. Значыцца (гл. далей), на падставе 2B, 9A і 9B пункт G ідэнтычны з пунктам H, гэтак што адрэзак

$$BH = B' \ C'.$$

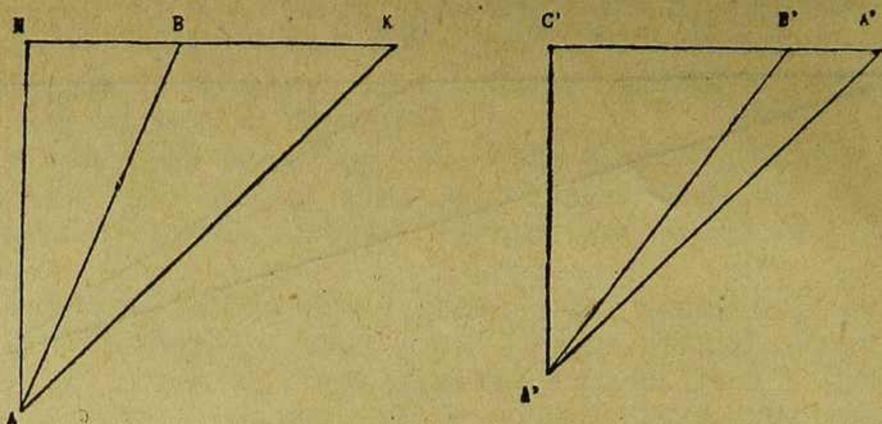
Калі-б пункт H ляжаў між A і B, тады з прычыны таго, што паводле 9B у паўпростай HB існуе гэткі пункт K (рыс. 6), што адрэзак

$$HK = HA = A' \ C';$$

дык паводле 2C адрэзак

$$AK = A' \ A';$$

значыцца, паводле 9A, 9B і 2B пункт K быў-бы ідэнтычны з пунктам A, адкуль мы мелі-б парадак ABA або AAB на



Рыс. 6.

аснове постулятаў Паша-Пэано, ужо ў нашай сыстэме выведзеных, або А быў-бы ідэнтычны з В; але ўсё гэта немагчыма.

Калі-б пункт К быў-бы ідэнтычны з В, тады з прычыны ВН=В' С', НК=А' С' было-б С' А'=С' В', што немагчыма пры парадку А' В' С'.

Значыцца, пункт Н належыць да паўпростай ВС і не ідэнтычны з яе пачаткам В. З прычыны таго, што адрэзак ВН=В' С'=ВС, значыцца, паводле 2А адрэзак ВН=ВС, дык пункт Н ідэнтычны з С, адкуль адрэзак АС=А' С', што і трэба было давесьці. Апошні вывад угрунтаваны на наступнай дапаможнай тэорэме:

Калі В ляжыць між А і С, тады адрэзак АВ ня можа быць роўны адрэзку АС.

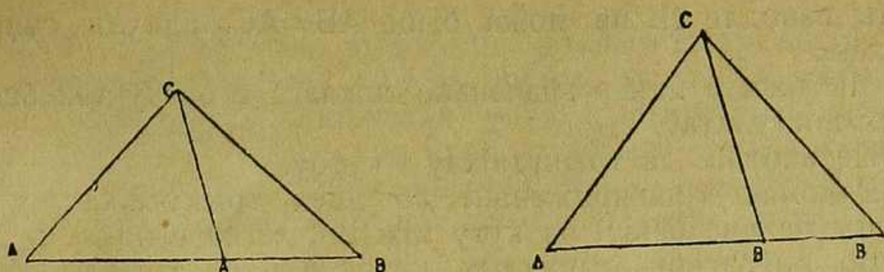
Вышэй, спасылаючыся на 2В, 9А і 9В, мы маем на ўвазе наступны лёгічна заключаючыйся ў іх факт:

Калі А розна ад В, тады адрэзак АВ ня можа быць роўны адрэзку СС.

Дзеля большай яскравасьці давядзем падрабязна апошнія два зацьвярджэньні, пачынаючы з другога і не спасылаючыся, зразумела, на III_2 Гільбэрта.

Па-першае, калі А розна ад В, тады адрэзак АВ ня роўны АА. Бо паводле 9А існуе ў p_0 пункт С (рыс. 7) па-за простай АВ. Тады паводле 2В ня можа быць адначасова АВ=АВ і АВ=АА, бо СА=СА і ў выпадку АВ=АА было-б паводле 2С:

$$CA = CB,$$



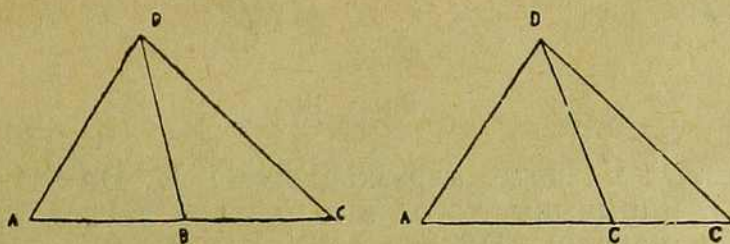
Рыс. 7.

бо:

$$CB = CB.$$

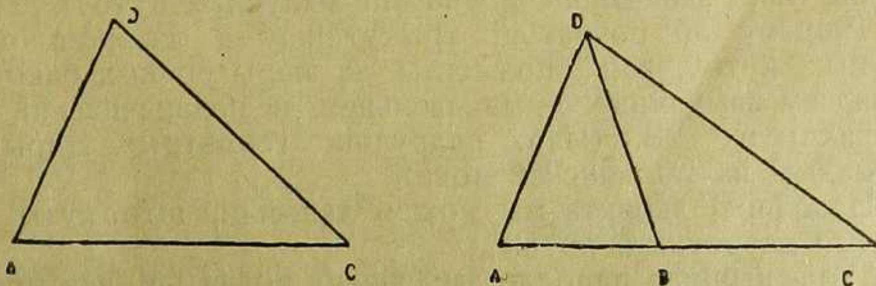
Калі-ж C розна ад A ды B, дык няхай будзе Д адвольны пункт прасторы p_0, розны ад C (9A). Паводле 9B у p_0 ёсьць пункт E, у парадку ДСЕ і такі, што адрэзак AB роўны CE, пры гэтым E розны ад C (гл. 9B). Калі-б было AB=CC, тады паводле 2A было-б і CE=CC, наперакор даведзенаму вышэй.

Няхай цяпер будзе парадак ABC. Давядзем, што адрэзак AB ня роўны AC. Зноў паводле 9A у p_0 ёсьць пункт D



Рыс. 8.

па-за простай AC. З прычыны таго, што AC=AC, дык паводле 2C павінна быць, з прычыны DC=DC, таксама DB==DC (пар. Розэнталь—у заўвагах Вольбэрга да расійскага выданьня „Асноў геомэтрыі“ Гільбэрта, Ленінград 1923). Але



Рыс. 9.

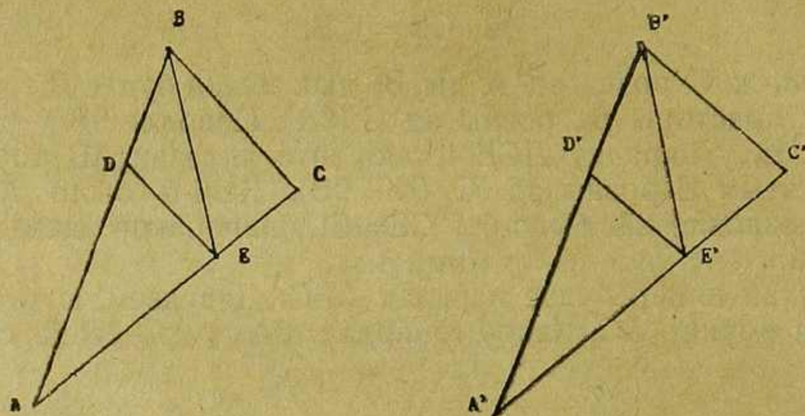
тады паводле 2B ня можа быць AB=AC, адкуль супярэчнасьць.

Мы бачым цяпер значэньне кожнага слова ў тэксьце нашых постулятаў.

Пераходзім да трыкутнікаў і кутоў.

Вядомае зацьвярджэньне аб двух трыкутніках, у якіх роўны па два бакі і па куту між імі, лёгка вынікае з 2C.

Бо роўнасьць выпуклых кутоў A і A' азначае, згодна з азначэньнем, існаваньне ў бакох гэтых кутоў гэткіх пунк-



Рыс. 10.

таў D, E, D', E', што адрэзкі DE=D' E', DA=D' A', EA==E' A'. З прычыны таго, што апрача гэтага AB=A' B', і мы маем парадкі ADB або ABD і A' D' B' або A' B' D' (калі D і D' розны ад B і B'), дык паводле 2C: BE=B' E'. Калі D ідэнтычна з B, дык у выніку 2A і даведзенага вышэй павінна быць D' ідэнтычна з B', значыцца, тады роўнасьць DE=D' E' сама і азначае, што BE=B' E'.

Але тады, з прычыны таго, што AC=A' C', дык мы зусім таксама выводзім, што BC=B' C'; значыць, трыкутнікі роўны (пар. азначэньне роўнасьці выпуклых кутоў).

Тэорэму аб роўнасьці трыкутнікаў з дзьвюма парамі роўных кутоў, якія прылеглы да пары роўных бакоў, мы давядзем звычайным прывядзеньнем да недарэчнасьці, але на аснове 2B. (Пар. падручнік геомэтрыі Энрыквэса і Амальдзі на італьянскай мове).

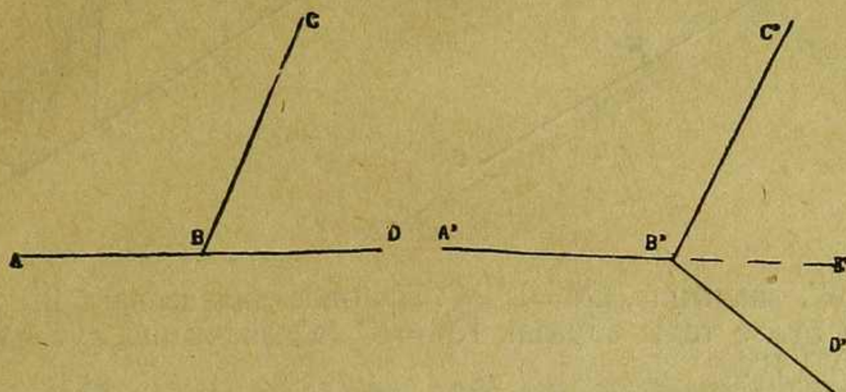
Паводле Гільбэрта мы можам давесьці, што куты, прылеглыя да роўных, роўны.

Тады вынікае паводле азначэньня роўнасьці нявыпуклых кутоў і на падставе 9E, што адвольныя два паўпоўныя куты

роўны, бо з іх магчыма выдзеліць роўныя выпуклыя куты, і прылеглыя да апошніх будуць роўны, значыцца, два паўпоўных куты—сумы адпаведна роўных выпуклых пасьлядоўных кутоў (бо прылеглыя куты відавочна пасьлядоўныя).

Далей, усякі кут, роўны паўпоўнаму, сам паўпоўны. Бо роўнасьць іх азначае, што яны сумы адпаведна роўных выпуклых кутоў:

ABC=A' B' C'; CBD=C' B' D'.



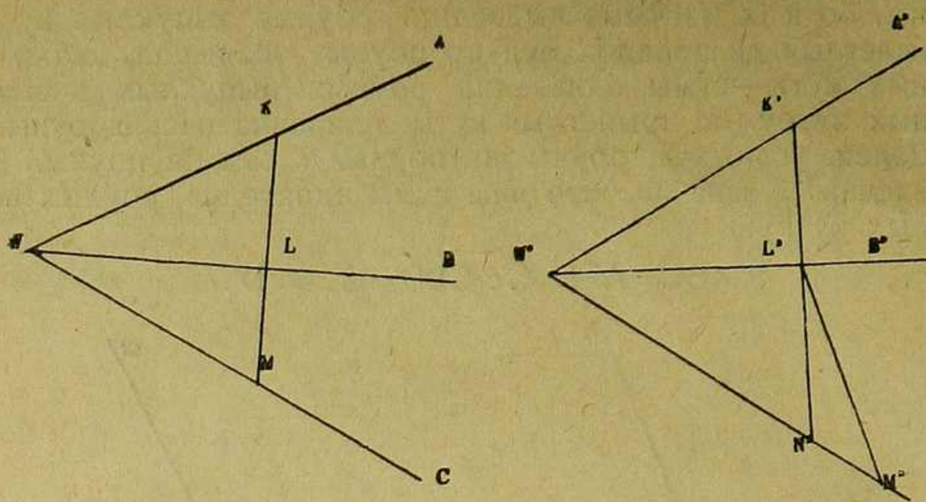
Рыс. 11.

Але тады CBD=C' B' E' (пры ўмове парадку A' B' E'), як прылеглыя да роўных. Значыцца, паводле 2B кут C' B' D' павінен быць ідэнтычны з кутам C' B' E', г. ё. кут A' B' D'—паўпоўны.

Тэорэма. Сумы пар адпаведна роўных выпуклых кутоў роўны, калі яны самі выпуклыя куты.

На самай справе, няхай кут AWB=A' W' B' і кут BWC==B' W' C'. (рыс. 12).

Выбярэм адвольны пункт K паўпростай WA, такі пункт K' паўпростай W' A' (на падставе 9B), каб адрэзак WK=W' K', адвольны пункт M паўпростай WC і такі пункт M' паўпростай W' C' каб (9B) адрэзак WM=W' M'; урэшце няхай будзе L пункт перасеку (на аснове постуляту Паша) адрэзку KM з паўпростай WB, і L' такі пункт паўпростай W' B', каб (9B) адрэзак WL=W' L'. Тады паводле тэорэмы аб трыкутніках з роўнымі кутамі між роўнымі бакамі будзе KL=K' L' і куты KLW=K' L' W', значыцца прылеглыя да іх куты WLM і W' L' M' роўныя, значыцца, кут W' L' N' паводле 2B ідэнтычны з кутам W' L' M', г. ё. мы маем парадак K' L' M'. Але трыкутнікі WLM і W' L' M' маюць WL=W' L' і WM=W' M', а таксама роўныя куты пры



Рыс. 12.

W і W', значыцца, LM=L' M'. Паводле даведзенага III_3 Гільбэрта будзе тады адрэзак KM=K' M', значыцца, кут AWB= =A' W' B'.

Мы бачым пры гэтым, што тутака K', M' і L' колінэарны, значыцца, K', W' і M' неколінэарны і кут K' W' M' выпуклы.

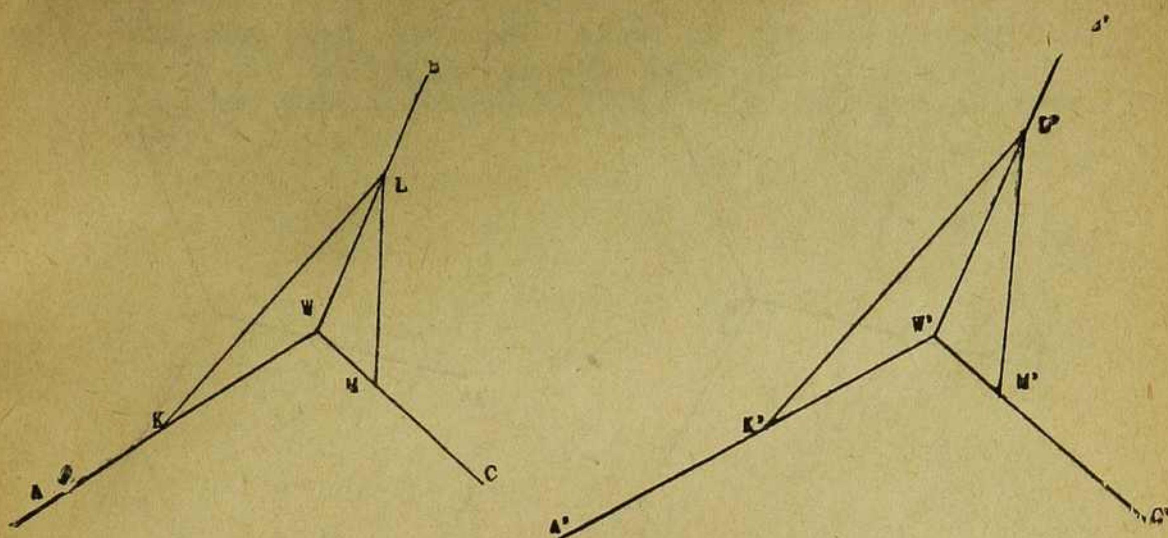
Калі, значыць, адна з дзьвёх сум пасьлядоўных адпаведна роўных кутоў—нявыпуклы кут, тады і другая—нявыпуклы кут. Калі адна з іх—паўпоўны кут, тады мы бачылі, што і другая—паўпоўны кут. Значыцца, калі адна—угнуты кут, тады другая—угнуты або поўны. Але апошні выпадак мы зараз выключым. На самай справе, тады прынамсі адзін з складнікаў гэтае сумы быў-бы ўгнутым або паўпоўным кутам, значыцца, ня мог-бы быць роўным выпукламу куту.

Тэорэма. Калі два ўгнутыя куты роўныя, тады выпуклыя куты з гэтымі самымі бакамі таксама роўныя.

На самай справе, згодна з азначэньнем, угнутыя куты толькі тады роўныя, калі яны сумы пар адпаведна роўных выпуклых кутоў, прыкладам (рыс. 13):

$$AWB = A'\ W'\ B';$$
$$BWC = B'\ W'\ C'.$$

Тады існуюць у бакох WA, WB, W' A', W' B' гэткія пункты K, L, K', L', што адрэзак WK=W' K', WL=W' L', KL=K' L'. Возьмем яшчэ адвольны пункт M боку WC і такі пункт M', які існуе паводле 9B у паўпростай W' C', што WM=W' M'. Тады паводле тэорэмы аб трыкутніках будзе LM=L' M'. Акрамя гэтага, будзе кут KLW=K' L' W'



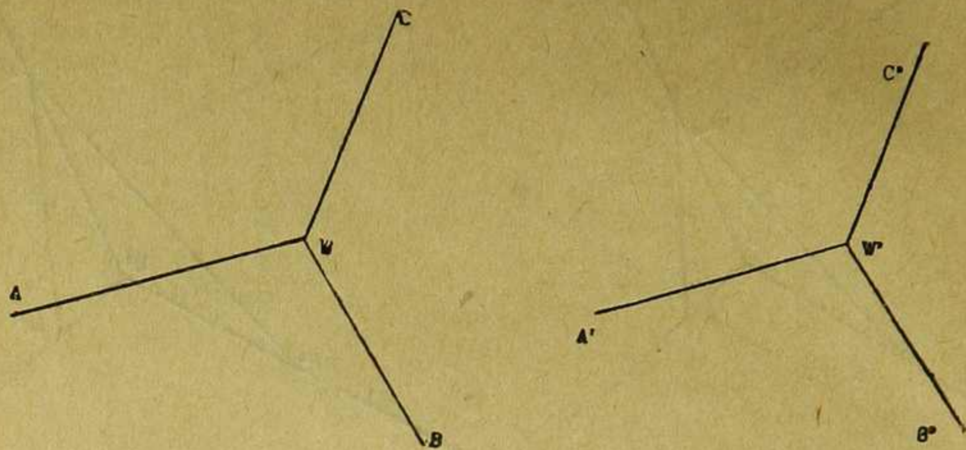
Рыс. 13.

і кут WLM=W' L' M'. Сумы KLM і K' L 'M' відавочна выпуклыя, бо ўжо куты KWC і K' W' M' выпуклыя, значыць, L і C ляжаць на розных бакох KW, L' і C' на розных бакох K' W', значыць L і W на адным баку WM, L' і W' на адным баку K' M' (дзеля перакананьня ў гэтым трэба яшчэ разгледзіць пункты перасеку адрэзкаў KM і K' M' з працягамі паўпростых WB і W' B' за W; гэтыя пункты існуюць у выніку выпукласьці кутоў AWB, BWM, A' W' B', B' W' M').

Значыцца, паводле даведзенага куты-сумы KLM = =K' L' M', а з прычыны таго, што LK=L' K' і LM=L' M', дык паводле тэорэмы аб трыкутніках і : KM=K' M'. Але KW=K' W' і MW=M' W'; значыцца, кут KWM=K' W' M', што і трэба было давесьці.

Адваротная тэорэма. Калі два выпуклыя куты роўныя, тады ўгнутыя куты з гэтымі-ж самымі бакамі таксама роўныя (рыс. 14).

На самай справе, калі AWB=A' W' B', тады возьмем адвольную паўпростую кута, вэртыкальнага да AWB, прыкладам WC (якая існуе паводле 2-га Кэрнзацу Паша) і пабудуем на аснове постуляту 9E кут A' W' C'=AWC. Тады куты BWA+AWC і B' W' A'+A' W' C' угнутыя і паводле папярэдняе тэорэмы кут CWB=C' W' B', значыцца, угнутыя куты AWC+CWB і A' W' C'+C' W' B' роўныя, што і трэба было давесьці.



Рыс. 14.

Вынік. Наша азначэньне роўнасьці нявыпуклых кутоў адназначна.

Бо калі адзін з іх паўпоўны, тады і другі паўпоўны, а два паўпоўныя куты роўныя паводле адвольнага раскладу. Калі адзін з іх угнуты, тады выпуклы кут з тымі-ж самымі бакамі роўны выпукламу з бакамі другога, які ня можа зводзіцца да аднэй паўпростай, бо і другі ня поўны кут, але таксама ўгнуты (пар. вышэй), і паводле папярэдняе тэорэмы роўны першаму паводле адвольнага раскладу. Калі адзін поўны, тады мы можам унутры яго пабудаваць выпуклы, і ўнутры другога, які тады таксама павінен быць поўны (пар. вышэй), паводле постуляту 9Е роўны яму выпуклы. Але тады ўгнутыя куты з тымі-ж самымі бакамі—сумы пар, а значыцца, даныя поўныя—сумы троек пасьлядоўных адпаведна роўных выпуклых кутоў.

Значыцца, усе поўныя куты роўныя, і кут, роўны поўнаму, заўжды поўны.

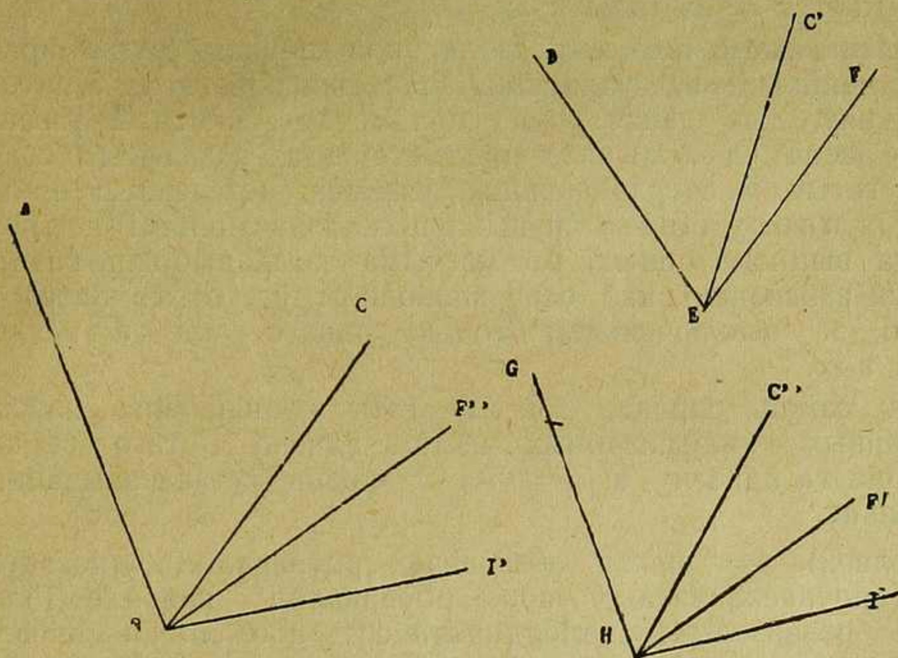
Мы назавем адзін кут меншым за другі, калі ён роўны ўласьцівай частцы гэтага другога, якая мае з апошнім адзін супольны бок. Паводле 2В кут, „меншы“ за другі, ня „роўны“ яму.

Тэорэма. З двух кутоў заўжды адзін роўны другому, або адзін меншы за другі.

Гэта вынікае з постуляту 9Е.

Тэорэма. Калі кут ABC менш за кут DEF, а апошні менш за кут GHI, тады кут ABC менш за кут GHI.

Калі кут ABC роўны куту DEC', а кут DEF роўны куту



Рыс. 15.

GHF', тады калі мы пабудуем пры BC, але ня ўнутры CBA, кут CBF''=C'EF (што магчыма на аснове постуляту 9E), тады кут ABF'' будзе роўны DEF, значыцца, роўны GHF'. Пабудуем яшчэ пры BF'', але ня ўнутры ABF'', існуючы на падставе постуляту 9E кут F''BI'=F'HI. Тады кут ABI'=GHI. Але паводле Гільбэрта тады ўнутры кута GHI ёсьць гэткая паўпростая HC'', што кут ABC=GHC'' і кут CBI' роўны куту C''HI. Значыцца, кут ABC роўны ўласьцівай частцы кута GHI, у якой бок HG супольны з самым кутам GHI.

Лёгка таксама давесьці, што калі адзін кут ABC роўны ўласьцівай частцы DEF другога кута DEG, якая мае з апошнім супольны бок ED, тады ён роўны і іншай уласьцівай частцы кута DEG, якая мае з ім супольны бок EG. Дзеля гэтага трэба толькі пабудаваць пры EG кут GEH, роўны DEF, потым пры EH кут, роўны FEG, і спаслацца на тэорэму аб сумах роўных кутоў і на 2B.

Мы ўстанавілі дзеля кутоў наступныя тэорэмы:

1) Кожны кут роўны якому-небудзь іншаму.

2) З двох кутоў a і в заўжды або $a=в$, або $a<в$, або $в<a$: прынамсі адна з гэтых суадносін мае месца.

3) Калі $a=в$, тады ня можа быць $a<в$.

4) Калі $a=в$ і $c=в$, тады $a=c$.

5) Калі $a<в<c$, тады $a<c$.

Мы пакажам, што калі дзеля якой-небудзь групы прадметаў нейкія дзьве суадносіны здавальняюць гэтыя 5 патрабаваньняў, дык даная група прадметаў — кляса вялічынь, і што дзеля адвольных прадметаў і адвольных суадносін гэтыя 5 патрабаваньняў узаемна незалежны: ніводнае з іх наогул (па-за спэцыяльнымі азначэньнямі) не зьяўляецца вынікам іншых, бо магчыма гэтак выбраць спэцыяльныя азначэньні, каб былі здаволены ўсе гэтыя патрабаваньні, за выключэньнем толькі аднаго, але адвольнага з іх.

На самай справе, для 1) гэта правяраецца клясай уласьцівых і неўласьцівых частак аднаго і таго самага уласьцівага адрэзку a; „=“ і „<“ маюць тутака звычайнае значэньне.

Дзеля 2): „=“ няхай абазначае „роўнавялікі“ многакутнік („роўнаскладзены“ або „роўнавялікі“ паводле Гільбэрта, разьдзел 4: „zerlegungsgleich“ або „inhaltsgleich“); „<“ няхай абазначае „роўнавялікі суме частак другога, кожная пара якіх ня мае супольных частак па-за контурам,— акрамя аднэй часткі, якая мае пункты па-за контурам“; і няхай мова ідзе аб клясе ўсіх многакутнікаў, да якое мы далучым яшчэ два азначаныя роўныя кругі.

Для 3) возьмем клясу адрэзкаў; „$a=в$“ няхай абазначае проста $a=в$, але „$a<в$“ няхай абазначае $a\leqq в$.

Дзеля праверкі незалежнасьці 4) возьмем клясу ўласьцівых адрэзкаў. Няхай „$a=в$“ абазначае $a=2в$, „$a<в$“—як вышэй $a\leqq в$.

Для 5) возьмем толькі 6 адрэзкаў a, b, c, d, e, f гэткіх, што $a=b$ (у звычайным сэнсе), $c=d=2a$, $e=f=4a$; хай „$r=s$“ абазначае, што або $r=s$, або $r=4s$, або $s=4r$; „$r<s$“ хай абазначае $2r=s$. Тады „$a<c<e$“, але ня будзе „$a<e$“, але будзе „$a=e$“ і „$e=a$“.

Нарэшце, мы давядзем, што з нашых 5 патрабаваньняў вынікае, што калі $a<b$, тады ня можа быць $b<a$.

На самай справе, паводле 5) тады было-б $a<a$, але паводле 1) і 4) $a=a$, што несумяшчальна з вышэй атрыманым паводле 3).

Лёгка паказаць, што тыя-ж самыя патрабаваньні здаволены ў нашай сыстэме дзеля клясы адрэзкаў, пры аналёгічным азначэньні тэрміну „меншы за“. З вышэй выкладзенага мы можам ужо паводле проф. Кагана („Вестник опытной физики и элементарной математики“, 1916 год, В. Ф. Каган, „Введение в учение об основаниях геометрии“) вывесьці ўсе ўласьцівасьці „лікавай параўнальнасьці“ адрэзкаў або кутоў.

Абцяканьне адвольнага ліку бесканечных кругавых цыліндраў патокам дасканалай і нясьціскальнай вадкасьці.

Ламбін.

Частка I.

§ 1. Гэта работа мае на мэце знайсьці разьмеркаваньне скорасьцяй у плоскім патоку дасканалай і нясьціскальнай вадкасьці, якія спатыкае на сваім шляху адвольны лік як хаця разьмешчаных кругавых цыліндраў. Пры гэтым прыпушчаецца, што скорасьці патоку маюць потэнцыял. Восі цыліндраў, канечне, павінны быць паралельны і складальная скорасьці, паралельная гэтым восям, усюды роўна нулю; інакш рух ня быў-бы плоскім.

Для выпадку аднаго цыліндра разьвязаньне гэтай задачы агульнавядома. Для выпадку двух цыліндраў адзін часны разьвязак даецца тэорыяй дробна-лінейных конформных пераўтварэньняў. Больш агульная задача разьвязана ў 1929 г. (Lagalli. Reibungslose Strömung in Aussengebiet zweier Kreise. Zeitschrift für angew. Mat. und Mech. B 9 h 4 1929). У паказаным артыкуле разьвязваецца задача аб абцяканьні двух цыліндраў, а таксама аб абцяканьні бесканечнага мноства цыліндраў, восі якіх ляжаць у аднэй роўніцы.

Усе ўспомненыя вышэй задачы, апроч задачы аб абцяканьні аднаго цыліндра, разьвязваюцца пры дапамозе тэорыі функцый комплекснай зьменнай.

§ 2. Сувязь між тэорыяй комплекснай зьменнай і задачамі гідрадынамікі месьціцца ў існаваньні так званай функцыі току.

З тэй прычыны, што рух вадкасьці плоскі, г. зн. адбываецца зусім аднолькава ва ўсіх роўніцах пэрпэндыкулярных восям цыліндраў, зьяўляецца магчымым замест разьмерка-

ваньня скорасьцяй у прасторы разглядаць разьмеркаваньне скорасьцяй у аднэй з гэтых роўніц. Возьмем гэту роўніцу за роўніцу комплекснай зьменнай $z = x + iy$. Тады, пры ўмове, што вадкасьць нясьціскальна і скорасьці маюць потэнцыял, існуе такая аналітычная функцыя $f(z)$, што сям'я ліній $Jf(z) = Const$ будзе сям'ёй ліній току вадкасьці, а сям'я ліній $Rf(z) = Const$ сям'ёй ортогональных да іх ліній.

Вывадная гэтай функцыі дае самую скорасьць. Абазначым яе праз $v(z)$:

$$v(z) = \frac{df(z)}{dz};$$

Тады складальная скорасьці па рэчаістай восі роўна рэчаістай часьці $v(z)$, а складальная па ўяўнай восі роўна коэфіцыенту пры ўяўнай адзінцы функцыі $v(z)$, узятаму з адваротным знакам. Такім чынам, калі разглядаць скорасьць таксама як функцыю комплекснай зьменнай (канечне ўжо не аналітычную), то аналітычная функцыя $v(z)$ зьяўляецца спрэжанай з гэтай функцыяй.

Праз функцыю $v(z)$ выражаюцца таксама цыркуляцыя вадкасьці па даным контуры і расход вадкасьці праз даны контур. Іменна: цыркуляцыя вадкасьці па даным замкнутым контуры роўна коэфіцыенту пры ўяўнай адзінцы сумы лішкаў асаблівых пунктаў $v(z)$, якія ляжаць у сярэдзіне гэтага контура, памножнаму на -2π; расход вадкасьці праз даны замкнуты контур роўны суме рэчаістых часьцей тых самых лішкаў, памножанай на $+2\pi$.

Такім чынам, для разьвязаньня гідрадынамічнай задачы пры паказаных абмежаваньнях даволі знайсьці функцыю $f(z)$ ці $v(z)$.

§ 3. Пастаўленая ў гэтым артыкуле задача разьвязваецца прыстасаваньнем прынцыпу сымэтрыі Рымана Шварца. Кожная акружына, якая атрымліваецца пры перасячэньні роўніцы z з адным з абцякаемых цыліндраў, зьяўляецца, канечне, лініяй току і, значыцца, на такой акружыне ўяўная часьць $f(z)$ сталая, г. зн. акружына гэта пэратвараецца функцыяй $f(z)$ у простую, паралельную рэчаістай восі. Таму да кожнай з гэтых акружын прыстасавальны прынцып сымэтрыі.

Цяпер прадставім сабе, што ўнутранасьць нашых цыліндраў таксама запоўнена вадкасьцю, і вадкасьць гэта рухаецца такім чынам, што рух яе характарызуецца функцыяй току,

якая атрымліваецца як аналітычны працяг функцыі $f(z)$ унутр нашых кругоў. Іншымі словамі, мы лічым, што патокі вадкасьці ў сярэдзіне і знадворку цыліндраў маюць агульную функцыю току $f(z)$. Тады ўсе асаблівасьці патоку вадкасьці ўнутры цыліндраў, г. зн. асаблівыя пункты функцый $f(z)$ і $v(z)$, будуць зьяўляцца паўтарэньнем асаблівасьцяй знадворнага патоку, паўтарэньнем, канечне, вядомым чынам зьмененым і ўскладненым.

Шлях, які прыводзіць да разьвязаньня задачы, і заключаецца ў тым, каб па асаблівасьцях патоку знадворку цыліндраў з дапамогаю прынцыпу сымэтрыі знайсьці асаблівасьці ў сярэдзіне цыліндраў, г. зн. асаблівыя пункты функцый $f(z)$ і $v(z)$, а потым па асаблівых пунктах збудаваць самыя функцыі.

Аднак, функцыя $f(z)$ зьяўляецца ў гэтых адносінах вельмі нязручнай, бо яна, наогул кажучы, неадназначная. Таму мы будзем шукаць ня функцыю току $f(z)$, а яе вывадную $v(z)$. Але для гэтай мэты патрэбна раней знайсьці тыя раўнаньні, якім павінна здавальняць функцыя $v(z)$ з тэй прычыны, што яе першапачатковая функцыя $f(z)$ здавальняе прынцыпу сымэтрыі адносна абцякаемых кругоў.

§ 4. Няхай радыусы паказаных у § 3 (абцякаемых) кругоў будуць $r_1, r_2, r_3 \ldots r_m$, а комплексныя каардынаты іх цэнтраў—$c_1, c_2, c_3 \ldots c_m$. Лік кругоў, значыцца, будзе m. Канечне кругі гэтыя не налягаюць адзін на адзін і нават не судатыкаюцца. Акружыны гэтых кругоў ператвараюцца функцыяй току $f(z)$ кожная ў простую, паралельную рэчаістай восі. Абазначым комплексныя каардынаты пунктаў перасячэньня гэтых простых з уяўнай восьсю праз $A_1 i$, $A_2 i$, $A_3 i \ldots A_m i$. Тады функцыя $f(z)—A_1 i$ ператварае першую акружыну ў рэчаістую вось, функцыя $f(z)—A_2 i$ другую акружыну і г. д.

Возьмем два пункты сымэтрычныя адносна першай акружыны. Калі адзін з іх абазначым праз z, то другі будзе $\frac{r_1^2}{z-C_1}+C_1$. Функцыя $f(z)—A_1 i$ прымае ў гэтых пунктах значэньні сымэтрычныя адносна рэчаістай восі, г. зн. спрэжаныя. Такім чынам, можам напісаць:

$$f(z)-A_1 i=\overline{f\left(\frac{r_1^2}{z-c_1}+C_1\right)-A_1 i}$$

і зусім таксама для другіх акружын:

$$f(z) - A_2 i = \overline{f\left(\frac{r_2^2}{z - c_2} + C_2\right) - A_2 i};$$

$$f(z) - A_m i = \overline{f\left(\frac{r_m^2}{z - c_m} + C_m\right) - A_m i}:$$

ці карацей:

$$f(z) - A_j i = \overline{f\left(\frac{r_j^2}{z - c_j} + C_j\right) - A_j i}. \quad \ldots \quad (1)$$

$$j = 1, 2, 3, 4, \ldots m.$$

Гэтыя m роўнасьняй справядлівы пры ўсіх значэньнях z [1]).

Цяпер знойдзем з роўнасьцяй (1) тыя ўмовы, якім павінна здавальняць функцыя $v(z) = \frac{df(z)}{dz}$. Будзем дыфэрэнцыяваць роўнасьць (1), што, канечне, магчыма, бо левая, а значыцца, і правая часьць роўнасьці—аналітычная функцыя. Атрымаем:

$$v(z) = \frac{d}{dz}\left[\overline{f\left(\frac{r_j^2}{z - c_j} + C_j\right)}\right]:$$

---

[1]) Раўнаньні (1) паказваюць, што для шуканай функцыі f(z) вельмі важную ролю адыгрывае група дробна-лінейных пераўтварэньняў, якая атрымліваецца з дапамогай інвэрсіі каля заданых акружын. Гэта група пераўтварэньняў спатыкаецца ў тэорыі аўтоморфных функцый у работах шмат якіх аўтараў (Shotky Borchard Journal Bd 83 1877. Shotky. Creelles Journal Bd 83 Bd 101 1877. Ritter. Übcr conforme Abbildung mehrfach zušammenhengender ebener Fläche. Matcematische Annalen Band 20 Bd 41. Burnsides. On a class of automorph functions. Proceedings of the London Mat. Sosiety 1891. Weber. Bettag zu Poincare'sche Theorie den Fuchsschen Functionen. Göttinger Nacgrichten 1866). На жаль, аўтар гэтага артыкулу ня меў магчымасьці азнаёміцца з паказанымі работамі.

Карысна заўважыць, што вывучаная ў гэтым артыкуле функцыя f(z) робіцца аўтоморфной, калі палажыць усе A_j роўнымі аднаму і таму-ж ліку. У самай рэчы ў гэтым выпадку ўсе даныя акружыны ператвараюцца функцыяй f(z) у адну і тую самую простую. У тую самую простую ператвараюцца, значыцца, і ўсе тыя акружыны, якія ўтвараюцца шляхам інвэрсіі калі спачатку даных акружын. Такім чынам, двум пасьлядоўным інвэрсіям у роўніцы z адпавядаюць у роўніцы f(z) два пасьлядоўныя адобразы каля адной і той самай простай. Значыцца, f(z) астаецца інварыянтнай для групы пераўтварэньняў, якія складаюцца кожнае з двух пасьлядоўных інвэрсій, г. зн. f(z) у гэтым выпадку аўтоморфная функцыя. У гэтай рабоце на лікі A_j не накладваецца загадзя ніякіх абмежаваньняў, апроч, канечне, умовы

паводле азначэньня вывадной для ўсякай аналітычнай функцыі F(z) маем:

$$\frac{d}{dz}\left[\overline{F(\bar z)}\right] = \lim \frac{\overline{F(\bar z + \overline{\triangle z})} - \overline{F(\bar z)}}{\triangle z}; \text{ пры } \triangle z \to O$$

У моц тожсамасьці $\bar{\bar A} = A$ можам замяніць $\triangle z$ на $\overline{\overline{\triangle z}}$ і тады атрымаем:

$$\frac{d}{dz}\left[\overline{F(\bar z)}\right] = \lim \frac{\overline{F(\bar z + \overline{\triangle z})} - \overline{F(\bar z)}}{\overline{\overline{\triangle z}}} \text{ пры } \triangle z \to O;$$

ці, прымаючы пад увагу тожсамасьці $\frac{\bar a}{\bar b} = \overline{\left(\frac{a}{b}\right)}$; $\bar a + \bar b = \overline{a + b}$; і $\lim \bar a = \overline{\lim a}$:

$$\frac{d}{dz}\left[\overline{F(\bar z)}\right] = \lim \overline{\frac{F(\bar z + \overline{\triangle z}) - F(\bar z)}{\overline{\triangle z}}}.$$

Цяпер заўважаем, што граніца, якая стаіць у правай часьці гэтай роўнасьці пад рысай ёсьць ня што іншае, як вывадная функцыі $F(\varsigma)$ пры $\varsigma = \bar z$, а таму:

$$\frac{d}{dz}\left[\overline{F(\bar z)}\right] = \overline{\frac{d}{d\varsigma} F(\varsigma)} \text{ пры } \varsigma = \bar z.$$

Гэта апошняя формула дае магчымасьць выканаць дыфэрэнцыяваньне роўнасьці (1), прымаючы пад увагу, што $\overline{z - c_j} = \bar z - \bar c_j$. Дыфэрэнцыяваньне дае:

$$v(z) = \overline{\frac{d}{d\varsigma} f\left(\frac{r_j^2}{\varsigma - c_j} + c_j\right)} = -\overline{v\left(\frac{r_j^2}{\varsigma - c_j} + c_j\right) \cdot \frac{r_j^2}{(\varsigma - c_j)^2}}; \text{ пры } \varsigma = \bar z.$$

І ўрэшце, замяняючы ς праз $\bar z$ і прымаючы пад увагу тожсамасьці $\overline{ab} = \bar a . \bar b$; $\bar{\bar a} = a$; $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\bar a}{\bar b}$; $\overline{a + b} = \bar a + \bar b$ і $\bar r = r$, калі r рэчаіста, атрымаем канчатковую формулу;

$$v(z) = -\overline{V\left(\frac{r_j^2}{\bar z - \bar c_j} + C_j\right)} \cdot \frac{r_j^2}{(z - c_j)^2}; \; j = 1, 2, 3, 4 \ldots m. \qquad (2)$$

іх рэчаістасьці, але затое задаюцца палажэньне асаблівага пункту ў дзядзіне знадворнай для абцякаемых кругоў і коэфіцыенты яе бесканечнай часьці. Лікі A_j гэтым азначаюцца з дакладнасьцю да агульнай для ўсіх іх адвольнай сталай.

Тожсамасьці, якімі мы карысталіся пры вывадзе гэтай роўнасьці, а іменна: $\bar{\bar{a}} = a$; $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$; $\bar{a} . \bar{b} = \overline{ab}$; $\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \overline{\left(\frac{a}{b}\right)}$; $\overline{\lim a} = \lim \bar{a}$ і $\bar{r} = r$, калі r рэчаіста, неаднакроць сустрэнуцца нам і ў далейшых вывадах. (*)

Прыведзенымі ператварэньнямі даводзіцца неабходнасьць роўнасьцяй (2). Лёгка бачыць, што яны зьяўляюцца таксама і дастатнымі ўмовамі таго, каб функцыя v(z) была разьвязкам нашай задачы. У самай рэчы паложым у аднэй з роўнасьцяй (2), няхай у роўнасьці з нумарам j, $z = c_j + r_j e^{i\varphi}$, г. зн. будзем лічыць, што пункт z ляжыць на акружыне з нумарам j. Атрымаем:

$$v(c_j + r_j e^{i\varphi}) = -\overline{v\left(\frac{r_j^2}{r_j e^{-i\varphi}} + C_j\right)} \cdot \frac{r_j^2}{r_j^2 e^{2i\varphi}},$$

ці

$$v(c_j + r_j e^{i\varphi}) = -\overline{v(r_j e^{i\varphi} + c_j)} \, . \, e^{-i\varphi}$$

Узяўшы аргумэнт ад абедзьвюх часьцей роўнасьці, атрымаем:

$$\arg v(c_j + r_j e^{i\varphi}) = \pi - \arg v(r_j e^{i\varphi} + C_j) - 2\varphi + 2k\pi;$$

ці

$$\arg v(c_j + r_j e^{i\varphi}) = k\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi$$

і значыцца, аргумэнт скорасьці, роўны аргумэнту v(z) з адваротным знакам, таксама роўны $-k\pi - \frac{\pi}{2} + \varphi$. Гэта значыць, скорасьць вадкасьці на акружыне накіравана пад кутом 90° да радыусу ці па датычнай. Такім чынам, разьвязаньне пастаўленай задачы зводзіцца да разьвязаньня сыстэмы раўнаньняў (2).

§ 5. Знойдзем полюсы функцыі v(z).

Перш за ўсё з умоў задачы выходзіць, што ва ўсёй дзялзіне знадворку нашых кругоў функцыя v(z) голоморфна, іначай скорасьць вадкасьці была-бы бесканечна вялікай.

Роўнасьці (2) паказваюць, што калі пункты z_1 і z_2 сымэтрычныя адносна аднэй з нашых акружын, прычым ні адзін з іх не зьяўляецца бесканечна аддаленым пунктам, то характар функцыі v(z) паблізу абодвух гэтых пунктаў аднолькавы: калі z_1—пункт голоморфнасьці, то і z_2—пункт голоморфнасьці, калі z_1—полюс, то і z_2—полюс і г. д. Гэта

робіцца відавочным з роўнасьцяй (2), калі прыняць пад увагу, што множнік $\frac{r_j^2}{(z - c_j)^2}$ ёсьць функцыя голоморфная і адрозьніваецца ад нуля ва ўсіх пунктах роўніцы, апроч C_j і ∞.

Іншая рэч, калі адзін з пунктаў z_1 і z_2—бесканечна аддалены пункт, а другі, значыцца, супадае з цэнтрам аднаго з абцяканых кругоў. У гэтым выпадку множнік $\frac{r_j^2}{(z - c_j)^2}$ абарачаецца ці ў нуль ці ў бесканечнасьць, і характар функцыі ў сымэтрычных пунктах c_j і ∞ аказываецца розным.

Паложым у аднэй з роўнасьцяй (2), у роўнасьці з нумарам j, што $z = c_j + \triangle z$; $\triangle z \to O$; тады $\left(\frac{r_j^2}{z - c_j} + c_j\right) \to \infty$.

Мы лічым, што ёсьць азначанае значэньне скорасьці на бесканечнасьці і, значыцца, азначанае значэньне $v(\infty)$ функцыі $v(z)$ пры $z = \infty$. Тады пры $z = c_j + \triangle z$; $\triangle z \to O$ з роўнасьцяй (2) маем:

$$v(c_j + \triangle z) = -v(\infty) \cdot \frac{r_j^2}{(\triangle z)^2} + \ldots,$$

гэта значыць, цэнтры нашых кругоў зьяўляюцца для функцыі $v(z)$ полюсамі, калі толькі $v(z)$ не абарачаецца на бесканечнасьці ў нуль другога ці больш высокага парадку. Гэты апошні выпадак, як пабачым у далейшым, можа мець месца, і мы яго разгледзім асобна, а покуль астановімся на першым прыпушчэньні.

Такім спосабам пункты $c_1, c_2, \ldots . c_m$ зьяўляюцца полюсамі функцыі $v(z)$.

Цяпер возьмем за пару пунктаў сымэтрычных адносна акружыны з нумарам j наступныя пункты: цэнтр якога-небудзь круга з нумарам адзначным ад j і сымэтрычны гэтаму цэнтру пункт у сярэдзіне круга з нумарам j. Ясна, што гэты апошні пункт таксама будзе полюсам $v(z)$ у моц аднакавасьці характару $v(z)$ у сымэтрычных пунктах. Такім чынам, кожнаму полюсу ў пункце C_j адпавядае яшчэ $(m-1)$ полюс у пунктах, якія зьяўляюцца кожны сымэтрычным з даным пунктам C_j адносна якой-небудзь з акружын з нумарам, адзначным ад C_j.

Усяго, такім чынам, атрымліваецца яшчэ $m\,(m-1)$ полюсаў. Кожнаму з гэтых апошніх полюсаў у моц такіх самых

меркаваньняў у сваю чаргу адпавядае (m—1) полюс і г. д. Адсюль ясна, што мноства полюсаў $v(z)$ бесканечна.

Увядзем абазначэньні для полюсаў функцыі $v(z)$. Перш за ўсё паложым $c_1 = z_1$; $c_2 = z_2 \ldots\ldots c_j = z_j \ldots\ldots c_m = z_m$. Індэкс пры літары z зьнізу паказвае, значыцца, нумар таго круга, цэнтрам якога зьяўляецца даны полюс. Скупнасьць гэтых m полюсаў будзем называць першай сэрыяй полюсаў.

Пункт, які ляжыць унутры другога круга і сымэтрычны з цэнтрам першага, абазначым праз $z_{1,\ 2}$, пункт, які ляжыць унутры трэцяга круга і сымэтрычны з цэнтрам сёмага— праз $z_{7,\ 3}$ і г. д. Будзем называць скупнасьць такім спосабам атрыманых полюсаў другой сэрыяй полюсаў. Такім чынам, для рацыянальнага абазначэньня другой сэрыі полюсаў патрэбны ўжо два індэксы j_1 і j_2. Першы індэкс j_1 абазначае нумар таго круга, цэнтр якога ў даным выпадку адабражаецца, а другі j_2—нумар таго круга, каля акружыны якога адбываецца адобраз. Ясна, што гэтыя два індэксы ня могуць быць роўнымі. Для атрыманьня ўсіх полюсаў другой сэрыі, г. зн. усіх пунктаў $z_{j_1\ j_2}$ трэба прыдаваць індэксам j_1 і j_2 незалежна адзін ад аднаго ўсе значэньні ад 1 да m і выкінуць тыя пары значэньняў, для якіх $j_1 = j_2$. Лёгка бачыць, што полюсаў другой сэрыі $m\ (m—1)$.

Полюсы другой сэрыі могуць быць вылічаны з умовы сымэтрычнасьці іх з полюсамі першай сэрыі, г. зн. з роўнасьцяй:

$$(z_{j_1\ j_2} - r_{j_2})\ \overline{(z_{j_1} - r_{j_2})} = r_{j_2}^2;\ j_1 \neq j_2.$$

Вышэй было паказана, што аналёгічна таму, як з полюсаў першай сэрыі атрымліваюцца полюсы другой сэрыі, з гэтых апошніх атрымліваюцца полюсы трэцяй сэрыі. Для іх абазначэньня патрэбны ўжо тры індэксы: j_1, j_2 і j_3. Першыя два з іх j_1 і j_2 служаць для абазначэньня таго полюсу другой сэрыі, які ў даным выпадку адабражаецца, а j_3— для абазначэньня нумару таго круга, каля акружыны якога адбываецца адобраз. Трэцяя сэрыя зьмяшчае $m\ (m—1)^2$ полюсаў. Полюсы трэцяй сэрыі могуць быць знойдзены з умовы сымэтрычнасьці іх з полюсамі другой сэрыі зусім таксама, як гэтыя апошнія знаходзяцца па полюсах першай сэрыі, а іменна з роўнасьцяй:

$$(z_{j_1\ j_2\ j_3} - r_{j_3})\ \overline{(z_{j_1\ j_2} - r_{j_3})} = r_{j_3}^2;\ j_1 \neq j_2;\ j_2 \neq j_3.$$

Тыя самыя разважаньні дастасавальны і да полюсаў усіх наступных сэрый.

З двух полюсаў, сымэтрычных адносна якой-небудзь з нашых акружын, будзем называць папярэднім той, у якога

нумар сэрыі меншы, і наступным той, у якога нумар сэрыі большы.

Увядзем яшчэ адзін індэкс для абазначэньня нумару той сэрыі, да якой належыць даны полюс, ці іначай для абазначэньня ліку адабражэньняў, з дапамогай якіх даны полюс атрыманы з бесканечна далёкага пункту. Яго будзем пісаць зьверху ў дужках, напрыклад: $z^{(2)}_{1,2}$, $z^{(4)}_{3,5,8,1}$ і г. д. Гэты індэкс заўсёды роўны ліку індэксаў, што стаяць унізе, і таму зьяўляецца, строга кажучы, лішнім, але ён дае магчымасьць часта ня пісаць ніжніх індэксаў, а толькі падразумяваць іх.

Такім чынам, маем пункты: $z_1^{(1)} = c_1$; $z_2^{(1)} = c_2 \ldots\ldots z_m^{(1)} = c_m$: наогул $z_{j_1}^{(1)} = c_{j_1}$; і далей $z^{(2)}_{1,2}$, $z^{(2)}_{1,3} \ldots\ldots z^{(2)}_{j_1 j_2}$; $j_1 \neq j_2$ і, урэшце, у агульным выглядзе $z^{(\kappa)}_{j_1, j_2, j_3 \ldots\ldots j_\kappa}$, прычым у радзе індэксаў $j_1\, j_2 \ldots\ldots j_\kappa$ няма двух роўных лікаў побач. Усе полюсы $z^{(\kappa)}_{j_1\, j_2\, j_3 \ldots\ldots j_\kappa}$ могуць быць вылічаны паступова з умовы сымэтрычнасьці полюсаў к-ай сэрыі полюсам (к—1)-ай сэрыі, г. зн. з роўнасьцяй

$$z_{j_1}^{(1)} = c_j; \; (z^{(\kappa)}_{j_1\, j_2\, j_3 \ldots\ldots j_\kappa} - c_{j_\kappa}) \, \overline{(z^{(\kappa-1)}_{j_1\, j_2\, j_3 \ldots j(\kappa-1)} - c_{j_\kappa})} = r^2_{j_\kappa}; \quad (3)$$

ці скарочана, падразумяваючы ніжнія індэксы:

$$z_{j_1}^{(1)} = c_{j_1}; \; (z^{(\kappa)} - c_{j_\kappa}) \, \overline{(z^{(\kappa-1)} - c_{j_\kappa})} = r^2_{j_\kappa}; \quad (3^1)$$

к-ая сэрыя зьмяшчае $m\,(m-1)^{\kappa-1}$ полюсаў.

Лёгка бачыць, што ўсе пункты $z^{(\kappa)}$ розныя. У самай рэчы, кожная з роўнасьцяй (3) дапушчае адназначны разьвязак як адносна $z^{(\kappa)}$, так і адносна $z^{(\kappa-1)}$. Таму, калі мы дапусьцім існаваньне двух супадаючых пунктаў з рознымі сыстэмамі індэксаў (апошнія індэксы відавочнага будуць аднолькавы), то павінны будуць супадаць і іх папярэднія пункты. Да гэтых апошніх пунктаў дастасавальна ізноў тое самае разважаньне і г. д. Паўтараючы гэтае разважаньне даволньы лік разоў, мы прыдзем да вываду, што ўсе індэксы нашых супадаючых пунктаў роўныя.

§ 6. Знойдзем бесканечныя часьці раскладаньняў $v(z)$ у рад Лёрана паблізу полюсаў $z^{(\kappa)}$. Абазначым коэфіцыенты гэтых раскладаньняў пры членах другога парадку праз

$P^{(\kappa)}_{j_1 j_2 \ldots \ldots j\kappa}$, а пры членах першага парадку праз $Q^{(\kappa)}_{j_1 j_2 \ldots j\kappa}$, г. зн. будзем лічыць, што бесканечная часьць раскладаньня v(z) паблізу пункту $z^{(\kappa)}_{j_1 j_2 j_3 \ldots \ldots j\kappa}$ роўна

$$\frac{P^{(\kappa)}_{j_1 j_2 \ldots \ldots j\kappa}}{\left(z - z^{(\kappa)}_{j_1 j_2 \ldots \ldots j\kappa}\right)^2} + \frac{Q^{(\kappa)}_{j_1 j_2 j_3 \ldots \ldots j\kappa}}{z - z^{(\kappa)}_{j_1 j_2 \ldots \ldots j\kappa}}$$

Полюсаў трэцяга ці больш высокага парадку сярод пунктаў $z^{(\kappa)}$ быць ня можа, што ясна відаць з роўнасьці (2).

З той прычыны. што ўсе гэтыя полюсы атрымліваюцца як многократнае адабражэньне бесканечна-далёкага пункту, натуральна шукаць выражэньне каэфіцыентаў $P^{(\kappa)}$ і $Q^{(\kappa)}$ праз коэфіцыенты раскладаньня v(z) паблізу бесканечна-аддаленага пункту. У далейшым мы пабачым, што коэфіцыенты $P^{(\kappa)}$ і $Q^{(\kappa)}$ будуць залежыць выключна ад першых двух коэфіцыентаў гэтага раскладаньня: ад вольнага члена $v(\infty)$ і ад коэфіцыента пры $\frac{1}{z}$. Гэты апошні коэфіцыент лік ўяўны. У самай справе крыніц вадкасьці на канечнай часьці роўніцы па-за нашымі кругамі няма. Самі кругі таксама ня могуць быць крыніцамі вадкасьці, бо іх акружыны зьяўляюцца лініямі току. Значыцца, расход вадкасьці праз усякі замкнуты контур, які заключае ўнутры сябе ўсе абцяканыя кругі, роўны нулю, а таму і сума рэчаістых часьцей лішкаў v(z) унутры такога контуру роўна нулю (гл. § 2). З другога боку, гэта сума лішкаў роўна коэфіцыенту пры $\frac{1}{z}$ у раскладаньні v(z) паблізу бесканечна-далёкага пункту. Адгэтуль і вынікае, што коэфіцыент гэты лік чыста ўяўны.

Такім спосабам паложым, што раскладаньне v(z) паблізу бесканечна-далёкага пункту будзе:

$$v(z) = v(\infty) + \frac{iq}{z} + \ldots\ldots, \text{ дзе } q \text{ рэчаіста.}$$

Цяпер паложым у роўнасьці (2) $z = c_j + \triangle z$; $\triangle z \longrightarrow O$; атрымаем:

$$v(z_{j_1}{}^{(1)} + \triangle z) = -\,\overline{v\left(\frac{r_j{}^2}{\triangle z} + C_j\right)} \cdot \frac{r_j{}^2}{(\triangle z)^2};$$

ці, пераходзячы да толькі што ўведзеных абазначэньняў і прымаючы пад увагу тожсамасьці (*) § 4:

$$\frac{P_{j_1}^{(1)}}{(\triangle z)^2}+\frac{Q_{j_1}^{(1)}}{\triangle z}+\ldots\ldots=$$

$$=-\overline{\left[v(\infty)+\frac{iq}{\frac{r_{j_1}{}^2}{\triangle z}+C_{j1}}+\ldots\ldots\right]}\cdot\frac{r_{j_1}{}^2}{(\triangle z)^2}=$$

$$=-\overline{\left|v(\infty)+\frac{iq\triangle z}{r_{j_1}{}^2}+\ldots\ldots\right|}\cdot\frac{r_{j_1}{}^2}{(\triangle z)^2}=\frac{-\overline{v(\infty)}\,r_{j_1}{}^2}{(\triangle z)^2}+$$

$$+\frac{iq}{\triangle z}+\ldots\ldots;$$

Параўноваючы коэфіцыенты пры аднолькавых ступенях левай і правай часьцей гэтай роўнасьці, атрымаем:

$$P_{j_1}^{(1)}=-\overline{v(\infty)}\,.\,r_{j_1}{}^2;\ Q_{j_1}^{(1)}=iq;\qquad \ldots\ldots (4)$$

Каб знайсьці коэфіцыенты $P^{(к)}$ і $Q^{(к)}$ для астальных полюсаў паложым у роўнасьці (2) $z=z_{j_1 j_2\ldots\ldots j\kappa}^{(к)}+\triangle z$ ці скарочана, падразумяваючы ніжнія індэксы $z=z^{(к)}+\triangle z$. Тады атрымаем:

$$v(z^{(к)}+\triangle z)=$$

$$=-\overline{v\left(\frac{r^2{}_{j\kappa}}{z^{(к)}-c_{j\kappa}+\triangle z}+C_{j\kappa}\right)}\cdot\frac{r_{j\kappa}{}^2}{(z^{(к)}+\triangle z-C_{j\kappa})^2};$$

ці

$$\frac{P^{(к)}}{(\triangle z)^2}+\frac{Q^{(к)}}{\triangle z}+\ldots\ldots=$$

$$=-\overline{v\left\{\frac{r_{j\kappa}{}^2}{z^{(к)}+\triangle z-C_{j\kappa}}+C_{j\kappa}\right\}}\cdot\frac{r_{j\kappa}{}^2}{(z^{(к)}+\triangle z-C_{j\kappa})^2}.$$

Ператворым кожны множнік правай часьці асобна, прымаючы пад увагу формулу (3). Атрымаем:

$$\overline{v\left\{\frac{r_{j\kappa}{}^2}{z^{(к)}+\triangle z-C_{j\kappa}}+C_{j\kappa}\right\}}=\overline{v\left\{\frac{r_{j\kappa}{}^2}{z^{(к)}-C_{j\kappa}}+C_{j\kappa}-\right.}$$

$$\overline{- \frac{r_{j\kappa}^2 \triangle z}{(z^{(\kappa)} - C_{j\kappa})(z + \triangle z - C_{j\kappa})}} \Bigg\} =$$

$$= v\,\overline{\left\{ z^{(\kappa-1)} - \frac{r_{j\kappa}^2 \triangle z}{(z^{(\kappa)} - C_{j\kappa})(z^{(\kappa)} + \triangle z - C_{j\kappa})} \right.}\,;$$

У гэтай формуле ніжнія індэксы ў $z^{(\kappa)}$ і $z^{(\kappa-1)}$ падразумяваюцца, $z^{(\kappa-1)}$ зьяўляецца, згодна нашай тэрмінолёгіі, пунктам, папярэджваючым $z^{(\kappa)}$.

Мы бачым, што ў правай часьці маем раскладаньне $v(z)$ паблізу $z^{(\kappa-1)}$ і таму, адкідваючы члены, якія ня маюць $\triangle z$ у назоўніку, можам напісаць, прымаючы пад увагу тожсамасьці § 4 і ізноў падразумяваючы ніжнія індэксы:

$$v\,\overline{\left\{ \frac{r_{j\kappa}^2}{z^{(\kappa)} + \triangle z - C_{j\kappa}} + C_{j\kappa} \right\}} =$$

$$= \Bigg| \frac{\overline{P^{(\kappa-1)}}\,\overline{(z^{(\kappa)} - C_{j\kappa})^2 (z^{(\kappa)} + \triangle z - C_{j\kappa})^2}}{r_{j\kappa}^4 (\triangle z)^2} -$$

$$- \frac{\overline{Q^{(\kappa-1)}}\,\overline{(z^{(\kappa)} - C_{j\kappa})(z^{(\kappa)} + \triangle z - C_{j\kappa})}}{r_{j\kappa}^2 \triangle z} + \ldots \Bigg| =$$

$$= \frac{\overline{P^{(\kappa-1)}}\,\overline{(z^{(\kappa)} - C_{j\kappa})^2 [(z^{(\kappa)} - C_{j\kappa})^2 + 2(z^{(\kappa)} - C_{j\kappa}) \triangle z]}}{r_{j\kappa}^4 (\triangle z)^2} -$$

$$- \frac{\overline{Q^{(\kappa-1)}}\,\overline{(z^{(\kappa)} - C_{j\kappa})^2}}{r_{j\kappa}^2 \triangle z} + \ldots = \frac{\overline{P^{(\kappa-1)}}\,\overline{(z^{(\kappa)} - C_{j\kappa})^4}}{r_{j\kappa}^4 (\triangle z)^2} +$$

$$+ \frac{2\overline{P^{(\kappa-1)}}\,\overline{(z^{(\kappa)} - C_{j\kappa})^3}}{r_{j\kappa}^4 \triangle z} - \frac{\overline{Q^{(\kappa-1)}}\,\overline{(z^{(\kappa)} - C_{j\kappa})^2}}{r_{j\kappa}^2 \triangle z} + \ldots;$$

Ператворым цяпер другі множнік:

$$\frac{r_{j\kappa}^2}{(z^{(\kappa)} - C_{j\kappa} + \triangle z)^2} = \frac{r_{j\kappa}^2}{(z^{(\kappa)} - C_{j\kappa})^2 + 2(z^{(\kappa)} - C_{j\kappa}) \triangle z + (\triangle z)^2} =$$

$$= \frac{r_{j\kappa}^2}{(z^{(\kappa)} - C_{j\kappa})^2} - \frac{2 r_{j\kappa}^2 \triangle z}{(z^{(\kappa)} - C_{j\kappa})^3} + \ldots$$

Злучаючы абодва множнікі, атрымаем:

$$\frac{P^{(\kappa)}}{(\triangle z)^2} + \frac{Q^{(\kappa)}}{\triangle z} + \ldots\ldots = -\frac{\overline{P^{(\kappa-1)}}(z^{(\kappa)} - C_{j\kappa})^2}{r_{j\kappa}^2 (\triangle z)^2} + \frac{\overline{Q^{(\kappa-1)}}}{\triangle z} + \ldots\ldots;$$

Параўноўваючы коэфіцыенты пры аднолькавых ступенях, атрымаем:

$$P^{(\kappa)} = -\overline{P^{(\kappa-1)}}\,\frac{\overline{(z^{(\kappa)} - C_{j\kappa})^2}}{r_{j\kappa}^2};\quad Q^{(\kappa)} = \overline{Q^{(\kappa-1)}} \quad . \ . \ (5)$$

Прымаючы пад увагу, што $Q^{(1)} = iq$, незалежна ад выбару круга, атрымаем:

$$Q^{(\kappa)} = (-1)^{\kappa-1}\, iq; \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (6)$$

Формулы (3), (4), (5) і (6) даюць магчымасьць вылічыць любы з лікаў $z^{(\kappa)}$, $P^{(\kappa)}$ і $Q^{(\kappa)}$.

§ 7. Разгледзім выпадак, калі $q = 0$, г. зн. агульная цыркуляцыя навакол усіх цыліндраў роўна 0 (гл. § 2). Тады ўсе коэфіцыенты $Q^{(\kappa)}$ таксама роўны нулю форм. (6).

Лёгка бачыць, што коэфіцыенты $P^{(\kappa)}$ зьмяншаюцца пры ўзрастаньні (к) (форм. 5). Гэта дае падставу спадзявацца, што прасумаваўшы ўсе бесканечныя часьці полюсаў $z^{(\kappa)}$ мы атрымаем зьбежны рад і рад гэты будзе разьвязкам нашай задачы. Складзем такі рад.

Сумаваньне полюсаў першай сэрыі дае:

$$\sum_{j_1=1}^{m} \frac{P_{j_1}^{(1)}}{(z - z_{j_1}^{(1)})^2}$$

ці падразумяваючы ніжнія індэксы пры $P^{(1)}$ і $z^{(1)}$:

$$\sum_{j_1=1}^{m} \frac{P^{(1)}}{(z - z^{(1)})^2}$$

сумаваньне бесканечных часьцей полюсаў другой сэрыі дае:

$$\sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{m} \frac{P^{(2)}}{(z - z^{(2)})^2};\quad j_1 \neq j_2$$

Прычым ізноў пры $P^{(2)}$ і $z^{(2)}$ падразумяваюцца індэксы j_1 і j_2.

Аналёгічна сумаваньне бесканечных часьцей полюсаў к-й сэрыі дае.

$$\sum_{j_1=1}^{m}\ \sum_{j_2=1}^{m}\ \sum_{j_3=1}^{m}\ \cdots\cdots\ \sum_{j_\kappa=1}^{m}\ \frac{P^{(\kappa)}}{\left(z-z^{(\kappa)}\right)^2}\ ;\ j_1\neq j_2\ ;\ j_2\neq j_3\ ;\ \cdots\cdots\ j_{(\kappa-1)}\neq j_\kappa\ ;$$

прычым у лікаў $z^{(\kappa)}$ і $P^{(\kappa)}$ падразумяваюцца **к** ніжніх індэксаў.

Усе гэтыя сумы абарачаюцца ў нуль пры $z=\infty$ і таму аканчальны рэзультат можа быць атрыманы ня проста сумаваньнем па ўсіх сэрыях, а прыбаўленьнем к складзенаму такім чынам раду сталага ліку $v(\infty)$.

Такім спосабам атрымаем:

$$v(z)=v(\infty)+\sum_{\kappa=1}^{\infty}\left[\sum_{j_1=1}^{m}\ \sum_{j_2=1}^{m}\ \sum_{j_3=1}^{m}\ \cdots\cdots\ \sum_{j_\kappa=1}^{m}\ \frac{P^{(\kappa)}}{\left(z-z^{(\kappa)}\right)^2}\right]\ ;\quad j_1\neq j_2\ ;\ j_2\neq j_3\ \cdots\cdots\ j_{\kappa-1}\neq j_\kappa \qquad (7)$$

Пры ліках $P^{(\kappa)}$ і $z^{(\kappa)}$ падразумяваюцца ўнізе тыя самыя індэксы, што і пры знаках сумы: $j_1\ j_2\ \cdots\cdots\ j_\kappa$;

§ 8. Не застанаўляючыся падрабязна на пытаньні аб дзядзіне зьбежнасьці раду (7), мы знойдзем тут толькі грубую адзнаку яго зьбежнасьці.

Разгледзім стасунак $\frac{P^{(\kappa)}}{P^{(\kappa-1)}}$, дзе $P^{(\kappa)}$ і $P^{(\kappa-1)}$ коэфіцыенты пры полюсах $z^{(\kappa)}$ і $z^{(\kappa-1)}$, прычым $z^{(\kappa-1)}$ зьяўляецца пунктам, папярэджваючым $z^{(\kappa)}$. Тады з формулы (5):

$$\left|\frac{P^{(\kappa)}}{P^{(\kappa-1)}}\right|=\left|\frac{\left(z^{(\kappa)}-C_{j\kappa}\right)^2}{r_{j\kappa}^{\,2}}\right|\ ;$$

Замяніўшы ў гэтай формуле $z^{(\kappa)}$ яго выражэньнем праз $z^{(\kappa-1)}$ па формуле (3), атрымаем:

$$\left|\frac{P^{(\kappa)}}{P^{(\kappa-1)}}\right|=\left|\frac{r_{j\kappa}^{\,4}}{\left(z^{(\kappa-1)}-C_{j\kappa}\right)r_{j\kappa}^{\,2}}\right|=\left|\frac{r_{j\kappa}^{\,2}}{\left(z^{(\kappa-1)}-C_{j\kappa}\right)^2}\right|\ ;$$

Абазначым стасунак радыусу акружыны з нумарам j да адлегласьці яе цэнтру да бліжэйшай другой акружыны праз Nj. Найбольшы з лікаў Nj абазначым праз N. Тады відавочна, што

$$\left| \frac{P^{(к)}}{P^{(к-1)}} \right| = \left| \frac{r_{jк}^{\,2}}{\left(z^{(к-1)} - C_{jк}\right)^2} \right| < N^2;$$

Адсюль, прымаючы пад увагу форм. (4), абазначаючы праз R радыус найбольшага з абцяканых кругоў, атрымаем:

$$\left| P^{(к)} \right| < \left| v(\infty) \right| . R^2 N^{2к-2}$$

Прыпусьцім цяпер, што нашы акружыны разьмешчаны такім чынам, што:

$$N^2 < \frac{1}{m-1}; \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Тады няцяжка збудаваць для раду (7) мажорантны рад, а іменна:

$$\left| v(\infty) \right| + \sum_{к=1}^{\infty} \left[\sum_{j_1=1}^{m} \sum_{j_2=1}^{m} \cdots \cdots \sum_{jк=1}^{m} \frac{\left| v(\infty) \right| . R^2 N^{2к-2}}{B^2} \right],$$

дзе B ёсьць адлегласьць ад пункту z да бліжэйшага пункту з ліку пунктаў $z^{(к)}$.

Гэты выраз ператворым такім чынам:

$$\left| v(\infty) \right| + \sum_{к=1}^{m} \frac{\left| v(\infty) \right| R^2 N^{2к-2} m(m-1)^{к-1}}{B^2} =$$

$$= \left| v(\infty) \right| + \frac{\left| v(\infty) \right| R^2 m}{B^2} \sum_{к=1}^{\infty} \left[N^2 (m-1) \right]^{к-1}$$

Пры ўмове (8) гэты рад прадстаўляе сабой бесканечна спадальную геомэтрычную прогрэсію і, значыцца, зьбягаецца абсолютна.

Такім спосабам рад (7) пры ўмове (8) зьбягаецца абсолютна.

§ 9. Калі зьбежнасьць раду (7) установлена ці з дапамогай прыметы (8) ці іншым спосабам, то можна сьцьвярджаць, што азначаная гэтым радам функцыя v(z) зьяўляецца разьвязкам пастаўленай задачы. У самай рэчы з структуры

раду відаць, што ўсе яго члены могуць быць згрупаваны папарна такім чынам, што кожную пару будуць складаць бесканечныя часьці двух полюсаў, сымэтрычных адносна акружыны з нумарам j. Акружына гэта будзе адна і тая самая для ўсіх гэтых пар. Выключэньне складзе цэнтр выбранай акружыны. Для яго парным лікам будзе сталы лік $v(\infty)$.

Такім чынам, атрымаем пары членаў віду $\frac{P^{(\kappa)}}{(z - z^{(\kappa)})^2} +$ $+ \frac{P^{(\kappa-1)}}{(z - z^{(\kappa-1)})^2}$ і адну пару $v(\infty) + \frac{P^{(1)}}{(z - z^{(1)})^2}$; кожная такая пара членаў, узятая асобна, здавальняе роўнасьці (2), бо каэфіцыенты $P^{(\kappa)}$ азначаліся якраз з гэтай умовы; значыцца, ёй здавальняе і іх сума.

Няцяжка бачыць, што паток вадкасьці, азначаемы радам (7), бесцыркуляцыйны: ня толькі агульная цыркуляцыя навакол усіх цыліндраў роўна нулю, але і цыркуляцыя навакол кожнага асобнага цыліндра роўна О. Гэта ясна з таго меркаваньня, што лішкі $v(z)$ роўны нулю (гл. § 2).

Калі маем ўсяго два цыліндры, $m=2$, то формула (7) значна спрашчаецца. У гэтым выпадку кожная сэрыя полюсаў мае усяго 2 полюсы. (У агульным выпадку іх будзе $m(m-1)^{\kappa-1}$ для сэрыі з нумарам к), і мы атрымаем больш простую формулу:

$$v(z) = v(\infty) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left[\frac{P^{(\kappa)}_{1,2,1,2 \dots j\kappa}}{(z - z^{(\kappa)}_{1,2,1,2 \dots j\kappa})^2} + \frac{P^{(\kappa)}_{2,1,2,1 \dots j\kappa}}{(z - z^{(\kappa)}_{2,1,2,1 \dots j\kappa})^2} \right];$$

Гэты апошні рад заўсёды зьбягаецца, бо для яго заўсёды выпаўняецца прымета зьбежнасьці (8).

Выпадкі чыста цыркуляцыйнага патоку і паступальнага патоку, злучанага з цыркуляцыйным, а таксама пытаньне аб адзінасьці разьвязку будуць разобраны ў далейшым.

(Працяг будзе).

Некалькі заўваг аб непадзельных мэтрычных лінійных прасторах.

Ц. Бурстын у Менску.

Няхай будзе R_ω непадзельная мэтрычная лінійная прастора, якой пункты мы абазначым праз A, B, ... X, Y, ... Няхай будуць $a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$; $b_1, b_2 \ldots b_n \ldots$; $x_1, x_2 \ldots x_n \ldots$; $y_1, y_2 \ldots y_n \ldots$ коордынаты пунктаў A, B, ... X, Y ....., а адлегласьць двох пунктаў X, Y аднаго ад другога, якую мы абазначым праз D(X, Y), няхай будзе

(1) $D(X, Y) =$ верхняй мяжы $|\alpha_i - y_i|$; $i = 1, 2 \ldots n \ldots$

Мы пакажам, што наша прастора R_ω з матрыцай (1) непадзельна. На справе, няхай будзе:

(2) $$\alpha = 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

які-небудзь ірацыянальны лік у прамежку 0—1 у дэкартавых коордынатах. Ліку α мы прыпарадкуем пасьлядоўнасьць цэлых лікаў $G_1^{(\alpha)}, G_2^{(\alpha)} \ldots G_n^{(\alpha)} \ldots$ прычым:

(3) $$G_n^{(\alpha)} = \alpha_1 10^{n-1} + \alpha_2 10^{n-2} + \ldots + \alpha_n$$

і пасьлядоўнасьць лікаў $\delta_1^{(\alpha)}, \delta_2^{(\alpha)}, \ldots \delta_{n1}^{(\alpha)} \ldots$, прычым

(4) $\delta_k^{(\alpha)} = 1$, калі $k = G_n^{(\alpha)}$ $(n = 1, 2, \ldots h \ldots)$ і

(4') $\delta_k^{(\alpha)} = 0$, калі $k \neq G_n^{(\alpha)}$.

Няхай цяпер будзе X_α пункт з коордынатамі $\delta_1^{(\alpha)}, \delta_2^{(\alpha)} \ldots \delta_n^{(\alpha)}$,

(5) $$X_\alpha (\delta_1^{(\alpha)}, \delta_2^{(\alpha)}, \ldots, \delta_n^{(\alpha)}, \ldots)$$

Гэткім чынам мы прымацавалі да кожнага ірацыянальнага ліку α (2) пункт X_α (5). Калі α, β — два розныя адзін ад аднаго ірацыянальныя лікі, тады ёсьць гэткі індэкс m, што ўсе

(6) $$G_n^{(\alpha)} \neq G_n^{(\beta)} \text{ дзеля } n > m$$

З (4), (4'), (5), (6) вынікае, значыцца, што:

(7) $$D(X_\alpha\ X_\beta) = 1, \text{ калі } \alpha \neq \beta.$$

Паводле гэтага ёсьць мноства магутнасьці констынууму пунктаў X_α у R_ω, якія маюць адлегласьць 1 адзін ад аднаго, г. зн. ёсьць у R_ω мноства магутнасьці с пунктаў, якія ляжаць у R_ω нідзе ня шчыльна. Прастора R_ω ёсьць непадзельная, што трэба было давесьці.

1. Тэорэма: *У нашай R_ω ёсьць $f=2^c$ неперарыўных функцый.*

Довад: Няхай будзе **M** якое-небудзь частковае мноства ірацыянальных лікаў (2), тады мы ўтворым функцыю $F(x)$:

(8) $F(x) = 1$ дзеля ўсіх пунктаў мноства **M**.

$F(x) = 0$ дзеля ўсіх ірацыянальных лікаў (2), якія не належаць да мноства **M**. Існуе, як мы ведаем $f = 2^c$ гэткіх розных функцый (8). Да кожнай функцыі $F(x)$ мы прымацуем неперарыўную функцыю $F(x)$ у R_ω наступным чынам:

Няхай будзе Y_α пункт з координатамі:

(9) $$Y_\alpha\ (3\ \delta_1^{(\alpha)},\ 3\ \delta_2^{(\alpha)},\ \ldots\ldots,\ 3\ \delta_n^{(\alpha)},\ \ldots\ldots)$$

тады з (7), (5) і (9) вынікае, што

(10) $$D(Y_\alpha,\ Y_\beta) = 3\ , \text{ калі } \alpha \neq \beta.$$

Цяпер мы абазначым ω—сфэру з Y_α як цэнтрам і радыусам r праз $K_\omega\,(Y_\alpha, r)$ і ўтворым функцыю $\Phi_F\,(X)$ наступным чынам:

(11) $$\Phi_F\,(Y_\alpha) = 2F(\alpha)$$

(12) $\Phi_F\,(X) = 2F(\alpha) + r$ ці $2F(\alpha) - r$ дзеля ўсіх пунктаў X дзеля якіх $D(Y_\alpha, X) = r$, калі $r \leqq 1$, значыцца, дзеля пунк-

таў X на паверхні ω — сфэр $K_\omega(Y_{\alpha}, r)$, а менавіта $2F(\alpha) + r$, калі $F(\alpha) = 0$, а $2F(\alpha) - r$, калі $F(\alpha) = 1$.

(13) $\Phi_F(X) = 1$ дзеля ўсіх іншых пунктаў прасторы R_ω. З (11), (12), (13) і (10) вынікае, што наша функцыя $\Phi_F(X)$ непарарыўна. Гэткім чынам мы прымацавалі да кожнай функцыі $F(X)$ (8) непарарыўную функцыю $\Phi_F(X)$ адназначна. Відаць лёгка, што дзьвюм, розным фунцыям $F(X)$ (8) адпавядаюць дзьве розныя непарарыўныя функцыі $\Phi_F(X)$. Існуе на падставе гэтага $2^c = f$ непарарыўных функцый $\Phi_F(X)$ у нашай R_ω. ш. т. б. д.

Калі коордынаты пункту X прасторы R_ω ёсьць: $x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$

$$(14) \qquad X \left\{ x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, \ldots\ldots \right\}$$

і

$$(15) \qquad F(X) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0}^{\infty} A\alpha_1 a_2 \ldots\ldots \alpha_n \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots\ldots x_n^{\alpha n}$$

ёсьць ступянёвы рад па $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, і калі ступянёвы рад (15) абсолютна зьбежны ў пэўным абсягу ў R_ω, тады (15) прадстаўлае непарарыўную функцыю [1]). Усяго ёсьць, як магчыма бачыць з пабудовы функцый (15), $2^{\aleph_0} = 1$ функцый гэтага роду. З тэорэмы 1, вынікае тэорэма 2: *Існуюць у R_ω непарарыўныя функцыі, якія немагчыма прадставіць як граніцы пасьлядоўнасьці функцый (15) ступянёвых радоў у R_ω.*

Довад: Існуе ўсяго $2^{\aleph_0} = c$ функцый, якія магчыма прадставіць як граніцы функцый (15), з другога боку ёсьць паводле тэорэмы 1. $2^c = f$ непарарыўных функцый у R_ω.

[1]) Пад абсягам я разумею ω-сфэру з нулявым пунктам $0(0,0, \ldots\ldots, 0 \ldots\ldots)$ як цэнтрам.

Дзеля гэтага ёсьць у R_ω неперарыўныя функцыі, якія нельга прадставіць як граніцы ступянёвых радоў (15), м. т. б. д.

Заўвага 1. Дзеля функцый скончанага ліку зьменных мае моц, як вядома, тэорэма, што кожная неперарыўная функцыя можа быць прадстаўлена, як граніца многачленаў [2]).

Дзеля гэтага ёсьць у R_ω неперарыўныя функцыі, якія ня могуць быць аналітычна зразуметы, аналітычна ў сэнсе Бэра, Борэля і Льбэга, г. ё. якія не належаць да клясы Бэра (з ступянёвымі радамі (15) як функцыямі нулявой клясы [3]).

Калі-б было магчымым прадставіць кожную функцыю $\Phi_F(X)$ конструктыўна, тады магчыма было-б таксама прадставіць кожную функцыю F(X) (8) як не мяральную таксама ў сэнсе L.

1, і 2, тэорэмы маюць моц агульна дзеля ўсіх мэтрычных непадзельных прастораў, якія маюць нідзе ня шчыльныя мноствы магутнасьці контынууму.

---

[2]) Было-б цікава давесьці аналёгічную тэорэму дзеля падзельных прастораў R_ω. *Дзеля лінійных функцый у падзельных прасторах мае моц*, як вядома, тэорэма Helly, што іх магчыма прадставіць як граніцы функцый

$$F_k(x_1\ x_2\ \ldots\ldots x_n\ \ldots\ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{kn}\, x_n$$

[3]) Уласьціва кажучы з мноствам неперарыўных функцый, якія магчыма атрымаць як граніцы ўсіх ступянёвых радоў,—як функцыямі нулявое клясы.

Einige Bemerkungen über nicht separable, metrische lineare Räume.

von. C. Burstin in Minsk.

Es sei R_ω ein nicht separabler, metrischer linearer Raum dessen Punkte wir mit A, B, ... X, Y ..... bezeichnen. Es seien $a_1, a_2 \ldots\ldots; b_1, b_2, \ldots\ldots b_n \ldots\ldots; x_1 \; x_2 \ldots\ldots x_n \ldots\ldots; y_1 \; y_2 \ldots\ldots y_n \ldots\ldots$ die Koordinaten der Punkte A, B, ... X, Y und die Entfernung zweier Punkte X, Y von einander, die wir mit D(X,Y) bezeichnen, sei

(1) D(X,Y) oberer Grenze von $|\alpha_i - y_i|$, $i = 1, r \ldots\ldots n \ldots\ldots$

Wir wollen zeigen, dass unser Raum R_ω mit der Metrik (1) nicht separabel ist. In der Tat, sei

(2) $$a = o, \alpha_1 \, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n \ldots\ldots$$

irgendeine irrationale Zahl im Intervall o—1 im dekadischen System. Der Zahl α ordnen wir die Folge ganzer Zahlen $G_1^{(\alpha)}, G_2^{(\alpha)} \ldots\ldots G_n^{(\alpha)} \ldots\ldots$ zu, wobei:

(3) $G_n^{(\alpha)} = a_1 \, 10^{n-1} + a_2 \, 10^{n-2} + \ldots\ldots + \alpha_n$ ist, und

eine Folge Zahlen $\delta_1^{(\alpha)}, \delta_2^{(\alpha)}, \ldots\ldots \delta_n^{(\alpha)} \ldots\ldots$, wobei

(4) $\delta_\kappa^{(\alpha)} = 1$, wenn $\kappa = G_n^{(\alpha)}$ $(n = 1, 2 \ldots\ldots h \ldots\ldots)$

und (4') $\delta_\kappa^{(\alpha)} = 0$, wenn $\kappa \neq G_n^{(\alpha)}$ ist

Es sei nun X_α ein Punkt mit den Koordinaten $\delta_1^{(\alpha)}, \delta_2^{(\alpha)} \ldots\ldots \delta_n^{(\alpha)}, \ldots\ldots$

(5) $$X_\alpha \; (\delta_1^{(\alpha)}, \delta_2^{(\delta)}, \ldots\ldots \delta_n^{(\alpha)} \ldots\ldots)$$

Auf diese Weise haben wir jeder irrationalen Zahl α (2) einen Punkt X_α (5) zugeordnet. Sind α, β zwei voneinander verschiedene irrationalle Zahlen, dann gibt es einen Index m von der Art, dass alle

(6) $$G_n^{(\alpha)} \neq G_n^{(\beta)}, \text{ für } n > m \text{ sind.}$$

Aus (4), (4'), (5), (6) folgt also, dass:

(7) $$D(X_{\alpha,} X_\beta) = 1 \text{ ist, wenn } \alpha \neq \beta \text{ ist.}$$

Es gibt demnach kontinuierlich viele Punkte X_α im R_ω, die voneinander die Entferung 1 besitzen, d. h. es gibt im R_ω eine Menge von der Mächtigkeit 1 von Punkten, die nirgends dicht im R_ω liegen. Der Raum R_ω ist demnach nicht separabel w. z. b. w.

1. Satz: *In unserem R_ω gibt es $f = 2^c$ stetige Funktionen.*

Beweis: Es sei **M** irgendeine Teilmenge der irrationalen Zahlen (2), dann bilden wir eine Funktion:

(8) $F(x) = 1$, für alle Punkte der Menge **M**

$F(x) = 0$, für alle irrationallen Zahlen (2), welche der Menge **M** nicht angehören. Es gibt, wie wir wissen, $2^c = f$ solcher verschiedene Funktionen F(x) (8) Jeder Funktion F(x) ordnen wir eine stetige Funktion $\Phi_F(X)$ im R_ω folgendermassen zu:

Es sei Y_α ein Punkt mit den Koordinaten:

(9) $$Y_\alpha \left\{ 3 \cdot \delta_1^{(\alpha)}, 3 \cdot \delta_2^{(\alpha)}, \ldots\ldots, 3 \, \delta_n^{(\alpha)} \ldots\ldots \right\},$$

dann folgt aus (7), (5) und (9), dass

(10) $$D(X_{\alpha_1} Y_\beta) = 3 \text{ ist, wenn } \alpha \neq \beta \text{ ist.}$$

Wir bezeichnen nun eine ω — Kugel mit Y_α als Mittelpunkt vom Radius r mit $K_\omega (Y_\alpha \; r)$ und bilden die Funktion $\Phi_F(X)$ wie folgt:

(11) $$\Phi_F(X_\alpha) = 2F(\alpha)$$

(12) *$\Phi_F(X) = 2F(\alpha) + r$ resp. $2F(\alpha) - r$ für alle Punkte X—* für welche $D(Y_{\alpha,} X) = r$, *wenn $r < 1$ ist,* also für die Punkte X

auf den Oberflächen der ω Kugeln K_ω (Y_{α}, r),—und zwar $2F(\alpha)+r$ wenn $F(\alpha)=0$ ist, und $2F(\alpha)-r$, wenn $F(\alpha)=1$ ist.

(13) *$\Phi_F(X)=1$, für alle anderen Punkte des Raumes R_ω.*

Aus (11), (12), (13) und (10) folgt, dass unsere Funktion $\Phi_F(X)$ stetig ist. Wir haben also jeder Funktion $F(X)$ (8) eine stetige Funktion $\Phi_F(X)$ eindeutig zugeordnet. Man sieht ohneweiters, dass zwei verschiedenen Funktionen $F(X)$ (8) zwei verchiedene stetige Funktionen $\Phi_F(X)$ entsprechen. Es gibt demnach $2^c=f$ stetige Funktionen $\Phi_F(X)$ im unseren R_ω. w. z. b. w.

Sind die Koordinaten des Punktes X des R_ω : $x_1\ x_2 \ldots . x_n \ldots .$

(14) $$X \left\{ x_1,\ x_2 \ldots .. x_n \ldots .. \right\}$$

und (15) $$F(X)=\sum_{\alpha_1+\alpha_2\ldots+\alpha_n+\ldots=0}^{\infty} A\alpha_1\ \alpha_2 \ldots .\ \alpha_n \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots .. x_n^{\alpha n}$$

eine Potenzreihe in $x_1\ x_2 \ldots .. \alpha_n \ldots ..$ nnd ist die Potenzreihe (15) in einem gewissen Bereiche im R_ω absolut konvergent, dann stellt (15) eine stetige Funktion im R_ω dar[1]. Es gibt im ganzen, wie man aus der Konstruktion der Funktionen (15) einsehen kann, $2^{\aleph_0}=c$ Funktionen dieses Art. Aus dem 1. Sats folgt der

2. Satz: *Es gibt im R_ω stetige Funktionen, welche man nicht als eine Grenze der Folge von Funktionen (15) von Potenzreihen im R_ω darstellen kann.*

Beweis: Es gibt im ganzen $2^{\aleph_0}=c$ Funktionen, die sich als Grenze von Funktionen (15) darstellen lassen, andererseits gibt es nach dem 1. Satz $2^c=f$ stetige Funktionen im R_ω. Es gibt demnach im R_ω stetige Funktionen, die sich nicht als Grenze von Potenzreihen (15) darstellen lassen, w. z. b. w.

[1]) Unter einem Bereich verstehe ich eine ω — Kugel mit dem Nullpunkte $0(0, 0, \ldots .. 0, \ldots ..)$ als Mittelpunkte.

1. Bemerkung: Für Funktionen von endlichvielen Variabeln gilt bekanntlich der Satz, dass sich jede stetige Funktion als Grenze von Polynomen darstellen lässt [2].

Es gibt demnach im R_ω stetige Funktionen, welche analytisch nicht darstellbar sind, analytisch im Sinne von Baire, Borel Lebesque, d. h. die nicht der Baire'sche Klasse (mit Potenzreihen (15) als Funktionen O-ten Klasse [3]) angehören.

Könnte man jede Funktion $\Phi_F(X)$ konstruktiv darstellen, so könnte man auch jede Funktion $F(X)$ (8) auch im L— Sinne nicht messbare Funktionen konstruktiv darstellen.

Der 1. und 2. Satr gilt allgemein für alle metrische, nicht separabte Raume, welche nirgends dichte Mengen von der Mächtigkeit des Kontinuums besitzen.

---

[2]) Es wäre interessant einen analogen Satz für separable Räume R_ω zu beweisen. *Für lineare Funktionen* in separablen Räumen gilt bekanntlich der Helly'sche Satz, dass man sie als Grenze von Funktionen

$$F_\kappa(x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n \ldots\ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\kappa n}\, x_n$$

darstellen kann.

[3]) Eigentlich mit der Gesamtheit der stetigen Funktionen, die man als Grenze aller Potenzreihen (15) erhält, als Funktionen O-ten Klasse.

Тэорэма аб ізопаверхневым адобразе.

Ц. Бурстын у Менску.

Няхай $\bar{F}_l$, $\bar{\bar{F}}_l$ дзьве l — мерныя гіпэрпаверхні ў n-мернай Эўклідавай прасторы R_n.

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{F}_l : \bar{x}_i = \bar{x}_i\, (\bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \dots\dots\ \bar{y}_l) \\ \bar{\bar{F}}_l : \bar{\bar{x}}_i = \bar{\bar{x}}_i\, (\bar{\bar{y}}_1,\ \bar{\bar{y}}_2,\ \dots\dots\ \bar{\bar{y}}_l) \end{cases} \quad i = 1,\ 2,\ \dots\dots\ n$$

дзе $l > 2$. Мы кажам, што дзьве паверхні $\bar{F}_l$, $\bar{\bar{F}}_l$ ізопаверхнева адабражаюцца адна на другую, калі паміж пунктамі гэтых $\bar{F}_l$, $\bar{\bar{F}}_l$ існуе гэткі неперарыўны аднаадзначны адобраз,

$$(2) \qquad \bar{\bar{y}}_k = \varphi_k\, (\bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \dots\dots\ \bar{y}_l)\ ;\ k = 1,\ 2,\ \dots\dots\ l$$

што ў адпаведных пунктах элемэнтам адпавядаюць роўныя лікі.

Абазначым адпаведныя элемэнты паверхняў праз $d\bar{f}$ d, $d\bar{\bar{f}}$. Тады:

$$(3) \qquad d\bar{f} = d\bar{\bar{f}}.$$

Пры гэтым, мэтазгодна, згодна (2) даць адпаведным пунктам роўныя парамэтры $y_1, y_2, \dots\dots y_l$. Для новай сыстэмы парамэтраў $y_1, y_2, \dots\dots y_l$, раўнаньні $\bar{F}_l$, $\bar{\bar{F}}_l$ будуць:

$$(4) \quad \begin{cases} \bar{F}_l : \vec{x} = \vec{x}_i\, (y_1,\ y_2,\ \dots\dots\ y_l) \\ \bar{\bar{F}}_l : \vec{x} = \vec{x}_i\, (y_1,\ y_2,\ \dots\dots\ y_l) \end{cases} ;\ i = 1,\ 2,\ \dots\dots\ n$$

і (2) ёсьць у гэтым выпадку тожсамасьць $\bar{\bar{y}}_k = \bar{y}_k$ ..... $k = 1, 2, \dots\dots l$. Давядзем наступную тэорэму.

1. Тэорэма. *Калі $\bar{F}_l$ $\bar{\bar{F}}_l$ $(l > 2)$ у R_n ізопаверхнева адабражаюцца, яны таксама ізомэтрычны.*

Довад. Мы давядзем, што элемэнты даўжыні паверхняў $d\bar{s} = d\bar{\bar{s}}$ роўны:

$$(5) \qquad d\bar{s} = d\bar{\bar{s}}$$

Сапраўды, няхай $\bar{g}_{ik}$, $\bar{\bar{g}}_{ik}$ мэтрычныя тэнзары паверхняў F_l , $\bar{\bar{F}}_l$ з (4):

$$(6) \qquad \begin{cases} \bar{g}_{ik}\,(\bar{y}_1,\ y_2,\ \dots\dots\ y_l)\ dy_i\ dy_k = d\,\bar{s}^2 \\ \bar{\bar{g}}_{ik}\,(y_1,\ y_2,\ \dots\dots\ y_l)\ dy_i\ dy_k = d\,\bar{\bar{s}}^2 \end{cases}$$

і элемэнты паверхняў $d\,\bar{f}$, $d\,\bar{\bar{f}}$:

$$(7) \qquad \begin{cases} d\,\bar{f}^2 = \begin{vmatrix} \bar{g}_{ik}\ , & \bar{g}_{ir} \\ \bar{g}_{hk}\ , & \bar{g}_{hr} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dy_i\ , & dy_h \\ \delta y_i\ , & \delta y_h \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dy_k\ , & dy_r \\ \delta y_k\ , & \delta y_r \end{vmatrix} \\ d\,\bar{\bar{f}}^2 = \begin{vmatrix} \bar{\bar{g}}_{ik}\ , & \bar{\bar{g}}_{ir} \\ \bar{\bar{g}}_{hk}\ , & \bar{\bar{g}}_{hr} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dy_i\ , & dy_h \\ \delta y_i\ , & \delta y_h \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dy_k\ , & dy_r \\ \delta y_k\ , & \delta y_r \end{vmatrix} \end{cases}$$

Але:

$$(3) \qquad d\,\bar{f} = d\,\bar{\bar{f}}$$

Няхай $\bar{P}$ ёсьць некаторы пункт F_l (яму адпавядае, згодна (4), пункт $\bar{\bar{P}}$ на $\bar{\bar{F}}_l$), парамэтры якога: $y_1^{(o)}$, $y_2^{(o)}$, ... $y_l^{(o)}$

Тады магчыма ў пункце $\bar{P}$ $\left\{ y_1^{(o)} ,\ y_2^{(o)}\ \dots\dots\ y_l^{(o)} \right\}$ператварыць парамэтры y_1, y_2, ... y_l такім чынам, што для новых парамэтраў $z_i = z_i\ (y_1,\ y_2,\ \dots\dots\ y_l)$ $i = 1,\ 2,\ \dots\dots\ l$ у пункце $\bar{P}$ $\left\{ z_i^{(o)} \right\}$ дзе $z_i^{(o)} = z_i\ (y_1^{(o)}\ y_2^{(o)} ,\ \dots\ y_l^{(o)})$, тэнзары $\bar{g}_{ik}$, $\bar{\bar{g}}_{ih}$ будуць мець наступную форму:

$$(8) \qquad \delta_{ik}\ \text{і}\ \lambda_i\ \delta_{ik}$$

З (8) і (3) вынікае патрэбны нам вынік, што:

$$(9) \qquad \lambda_i = 1\ ;\ i = 1,\ 2,\ \dots\dots\ \lambda$$

Сапраўды, возьмем:

$$(10) \qquad \begin{array}{l} dz_i^{(j)} \left\{ dz_1 = 0,\ dz_2 = 0,\ \dots\dots\ dz_{j-1} = 0,\ dz_j = 1\ \dots\ dz_l \right\} \\ \delta z_i^{(k)} \left\{ \delta z_1 = 0,\ \delta z_2 = 0,\ \dots\ \delta z_{k-1} = 0,\ \delta z_k = 1,\ \dots\ \delta z_l \right\} \end{array}$$

Такім чынам, каб для $dz_i^{(j)}$ j $\stackrel{\text{та}}{=}$ компонэнта 1, а для $\delta z_i^{(\kappa)}$ к $\stackrel{\text{та}}{=}$ компонэнта была роўна 1. Тады згодна (7), (8) і (10):

$$(11) \begin{cases} df^2 = \begin{vmatrix} \delta_{jj}, & \delta_{jk} \\ \delta_{kj}, & \delta_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ d\bar{\bar{f}}^2 = \begin{vmatrix} \lambda_j \delta_{jj}, & \delta_{jk} \\ \delta_{kj}, & \lambda_k \cdot \delta_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda_j \cdot \lambda_k \end{cases}$$

Такім чынам, з (3) вынікае:

(12) $$\lambda_j \lambda_k = 1$$

Калі $l > 2$, магчыма абабраць $\binom{l}{2} \geqslant 1$ пар элемэнтаў $d_{y_i}^{(j)}, \delta_{y_i}^{(\kappa)}$, дзе $j \neq \kappa$; $j, \kappa = 1, 2, \ldots\ldots l$

Мы атрымаем гэткім спосабам $\binom{l}{2}$ раўнаньняў:

(13) $$\lambda_j \cdot \lambda_k = 1 \;;\; j \neq \kappa \;;\; j, k = 1, 2, \ldots\ldots l$$

З (13) вынікае, відавочна:

(14) $$\lambda_j = 1 \;,\; j = 1 \;,\; 2 \ldots\ldots l$$

З прычыны таго, што тэнзары $\bar{g}_{ik}$, $\bar{\bar{g}}_{ik}$ для парамэтраў $z_1, z_2, \ldots\ldots z_l$ у пункце $z_1^{(o)}, z_2^{(o)}, \ldots\ldots z_l^{(o)}$ роўны пажіж сабою і роўны δ_{ik}, яны роўны таму для ўсіх сістэм парамэтраў у пункце $y_1^{(o)}, y_2^{(o)} \ldots\ldots y_l^{(o)}$, значыцца:

(15) $\bar{g}_{ik} = \bar{\bar{g}}_{ik}$ у пункце $\left\{ y_1^{(o)}, y_2^{(o)}, \ldots\ldots, y_l^{(o)} \right\}$,

Але $y_1^{(o)}, y_2^{(o)} \ldots\ldots y_l^{(o)}$ абабраны адвольна, значыць (15) задавальняецца для ўсіх пунктаў $\bar{F}_l$ і $\bar{\bar{F}}_l$.

З (15) вынікае тады (5). Ш. п. д.

---

[1]) Калі $\bar{g}_{ik}$ і $\bar{\bar{g}}_{ik}$ ёсьць дзьве квадратычныя формы, з якіх ва ўсякім выпадку адна дадатна азначана, тады паводле вядомай альгебраічнай тэорэмы існуе гэткая лінійная трансформацыя, якая пераводзіць абедзьве формы ў канонічны выгляд.

1. Заўвага. Для $1 = 2$ тэорэма не правідлова. Гэта паказвае наступны прыклад. Возьмем адобраз:

$$(16) \qquad \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{к} x \quad 0 < к < 1 \\ \bar{y} &= к\, y \end{aligned}$$

Гэты адобраз ізопаверхневы, але не ізомэтрычны.

2. Заўвага. Тэорэма 1. правідлова таксама для к—ізогіпэраб'ёмнага адобразу дзьвёх $\bar{F}_1$, $\bar{\bar{F}}_1$ у R_n, калі $1 > к$.

Ein Satz über Flächentreue Abbildung.

von C. Burstin in Minsk.

Sind F_l, $\bar{\bar{F}}_l$ zwei l dimensionale Hyperflächen in einem n dimensionalen euklidischen Raum R_n

$$(1)\quad \begin{cases} F_l : \bar{x}_i = \bar{x}_i (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots\ldots \bar{y}_l) \\ \bar{\bar{F}}_l : \bar{\bar{x}}_i = \bar{\bar{x}}_i (\bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \ldots\ldots \bar{\bar{y}}_l) \end{cases} ;\ i = 1, 2, = n$$

gegeben, wobei $l > 2$ ist, dann sagen wir, dass die zwei F_l, $\bar{\bar{F}}_l$ flächentreu aufeinander abbildbar sind, wenn zwischen den Punkten dieser F_l, $\bar{\bar{F}}_l$ eine eineindeutige stetige Abbildung

$$(2)\qquad \bar{\bar{y}}_k = \varphi_k (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots\ldots \bar{y}_l) ;\ k = 1, 2, \ldots\ldots l$$

von der Eigenschaft, dass in zugeordneten Punkten den entsprechenden Flächenelementen gleiche Zahlen entsprechen. Bezeichnen wir die entsprechenden Flächenelemente mit $d\bar{f}$, $d\bar{\bar{f}}$, dann ist

$$(3)\qquad d\bar{f} = d\bar{\bar{f}}.$$

Für unsere Zwecke ist es ratsam den zufolge (2) zugeordneten Punkten gleiche Parameter $y_1, y_2, \ldots\ldots y_l$ zu geben. Für das neue Parametersystem $y_1, y_2, \ldots. y_l$ seien die Gleichuugen der $\bar{F}_l$, $\bar{\bar{F}}_l$

$$(4)\quad \begin{cases} \bar{F}_l : \bar{\vec{x}}_i = \bar{\vec{x}}_i (y_1, y_2 \ldots\ldots y_l) \\ \bar{\bar{F}}_l : \bar{\bar{\vec{x}}}_i = \bar{\bar{\vec{x}}}_i (y_1, y_2, \ldots\ldots y_l) \end{cases} i = 1, 2 \ldots\ldots n$$

Die Zuordnungsfunktion (2) ist dann eine identische Beziehung: $y_k = y_k$ $k = 1, 2 \ldots\ldots l$

Wir wollen nun den Satz beweisen:

1. Satz: *Sind zwei F_l, $\bar{\bar{F}}_l$* (wobei $l > 2$ ist) im *R_n flächentreu abbildbar, dann sind sie auch längentreu abbildbar.*

Beweis: Wir wollen beweisen, dass wenn $d\bar{s}$, $d\bar{\bar{s}}$ die Linienelemente von F_l, $\bar{\bar{F}}_l$ sind, dann

$$(5)\qquad d\bar{s} = d\bar{\bar{s}}$$

ist. Es sein in den Tat $\bar{g}_{ik}$, $\bar{\bar{g}}_{ik}$ die beiden Masstensoren der $\bar{F}_l$, $\bar{\bar{F}}_l$, dann sind zufolge (4') die Messtensoren:

$$(6)\quad \begin{cases} \bar{g}_{ik}\,(y_1, y_2, \ldots\ldots y_l)\, dy_i\, dy_k = d\bar{s}^2 \\ \bar{\bar{g}}_{ik}\,(y_1\, y_2 \ldots\ldots y_l)\, dy_i\, dy_k = d\bar{\bar{s}}^2 \end{cases}$$

und die beiden Flächenelemente $d\bar{f}$, $d\bar{\bar{f}}$

$$(7)\quad \begin{cases} d\bar{f}^2 = \begin{vmatrix} \bar{g}_{ik}, & \bar{g}_{ir} \\ \bar{g}_{hk}, & \bar{g}_{hr} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dy_i, & dy_h \\ \delta y_i, & \delta y_h \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dy_k, & dy_r \\ \delta y_k, & \delta y_r \end{vmatrix} \\ d\bar{\bar{f}}^2 = \begin{vmatrix} \bar{\bar{g}}_{ik}, & \bar{\bar{g}}_{ir} \\ \bar{\bar{g}}_{hk}, & \bar{\bar{g}}_{hr} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dy_i, & dy_h \\ \delta y_i, & \delta y_h \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dy_k, & dy_r \\ \delta y_k, & \varrho y_r \end{vmatrix} \end{cases}$$

Nun ist aber:

$$(3)\qquad d\bar{f} = d\bar{\bar{f}}$$

Es sei $\bar{P}$ irgendein Punkt der $\bar{F}_l$ (ihm entspricht zufolge (4') ein Punkt $\bar{\bar{P}}$ der $\bar{\bar{F}}_l$), dessen Parameter $y_1^{(o)}, y_2^{(o)}, \ldots y_l^{(o)}$ sind. Wir können im Punkte $\left\{ y_1^{(o)}, y_2^{(o)} \ldots\ldots y_l^{(o)} \right\}$ eine Transformation des Parametersystems $y_1, y_2 \ldots\ldots y_l$ vornehmen: $z_i = z_i\,(y_1, y_2, \ldots\ldots y_l)$, $i = 1, 2, \ldots\ldots l$, sodass für das neue Parametersystem $z_1, z_2 \ldots\ldots z_l$ im Punkte $\bar{P}$ $\left\{ z_i^{(o)} \right\}$ wobei $z_i^{(o)} = z_i\,(y_1^{(o)} \ldots\ldots y_l^{(o)})$ ist, die Tensoren $\bar{g}_{ik}$, $\bar{\bar{g}}_{ik}$ die Form [1]).

$$(8)\qquad \delta_{ik}\ , \text{ und } \lambda_i\, \delta_{ik}$$

annehmen. Aus (8) unf (3) folgt, wie wir zeigen wollen, dass ist.

$$(9)\qquad \lambda_i = 1,\ i = 1, 2, \ldots\ldots l.$$

In der Tat nehmen wir an, :

$$(10)\quad \begin{aligned} dz_i^{(j)} &\left\{ dz_1 = 0,\ dz_2 = 0, \ldots\ dz_{j-1} = 0,\ dz_j = 1 \ldots\ dz_l = 0 \right\} \\ \delta z_i^{(k)} &\left\{ \delta z_1 = 0,\ \delta z_2 = 0, \ldots\ \delta z_{k-1} = 0,\ \delta z_k = 1, \ldots\ \delta z_l = 0 \right\} \end{aligned}$$

[1]) Sind $\bar{g}_{ik}$, $\bar{\bar{g}}_{ik}$ zwei quadratische Formen, von denen mindestens eine positiv definit ist, dann gibt es nach einen bekannten Satz aus der Algebra eine lineare Transformation der Veränderlichen, welche beide Formen auf die kanonische Gestalt bringt.

sodass für $dz_i^{(j)}$, die $j^{\underline{te}}$ Komponente 1 und für $\delta z_i^{(k)}$ die $k^{\underline{te}}$ Komponente 1 ist, dann ist zufolge (7), (8) und (10)

$$(11) \left\{ \begin{aligned} d\overline{f}^2 &= \begin{vmatrix} \delta_{jj} , & \delta_{jk} \\ \delta_{kj} , & \delta_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 , & 0 \\ 0 , & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 , & 0 \\ 0 , & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ d\overline{\overline{f}}^2 &= \begin{vmatrix} \lambda_j \, \delta_{jj} , & \delta_{jk} \\ \delta_{kj} , & \lambda_k \, \delta_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 , & 0 \\ 0 , & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 , & 0 \\ 0 , & 1 \end{vmatrix} = \lambda_j \cdot \lambda_k , \end{aligned} \right.$$

also es folgt aus (3).

$$(12) \qquad \lambda_j \, \lambda_k = 1$$

Ist $l > 2$, dann können wir $\binom{l}{2} \geqq 1$ verschiedene Paare von Elementen dy_i, δy_i wählen, wobei $j \neq k$ und $j, = 1, 2, \ldots . l$ und $k = 1, 2, \ldots . . l$ ist, und bekommen dann auf diese Weise $\binom{l}{2}$ Gleichungen:

$$(13) \qquad \lambda_j \, \lambda_k = 1 \text{ für } j \neq k \; ; \; j, k = 1, 2 \ldots . . l$$

Aus (13) folgt dann, wie man sieht,

$$(14) \qquad \lambda_j = 1 \; ; \; j = 1, 2, \ldots . . l$$

Da die Tensoren $\overline{g}_{ik}$, $\overline{\overline{g}}_{ik}$ für das Parametersystem z_1, $z_2 \ldots . . z_l$ im Punkte $z_1^{(o)}, z_2^{(o)}, \ldots , z_l^{(o)}$ gleich sind und zwar beide gleich δ_{ik} sind, so sind sie für alle Parametersysteme im Punkte $y_1^{(o)}, y_2^{(o)} \ldots . y_l^{(o)}$ gleich; es ist also

$$(15) \qquad \overline{g}_{ik} = \overline{\overline{g}}_{ik} \text{ im Punkte } \left\{ y_1^{(o)}, y_2^{(o)}, \ldots . . y_l^{(o)} \right\}$$

und da $y_1^{(o)}, y_2^{(o)}, \ldots . . y_l^{(o)}$ beliebig gewählt wurden, so gilt (15) für alle Punkte der $\overline{F}_l$ resp. $\overline{\overline{F}}_l$.

Aus (15) folgt dann die Beziehung (5) w. z. b. w.

1. Bemerkung: Für $l = 2$ gilt der Satz nicht. Das folgende Beispiel zeigt es. Nehmen wir die Abbildung:

$$(16) \qquad \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{k} x \\ \bar{y} &= ky \end{aligned} \qquad 0 < k < 1,$$

dann ist die Abbildung flächentreu aber nicht längentreu.

2. Bemerkung: der 1. Satz gilt auch für k—hypervolumentreu Abbildungen zweier F_l, F_l im R_n, wenn $l > k$ ist.

Аб адной тэорэме арытмэтыкі і тэорыі мностваў.

Ц. Бурстын у Менску.

У гэтым кароткім артыкуле мы пабудуем мноства **M** рэчаісных лікаў, паміж якімі ня можа існаваць ніякай рацыянальнай суадносіны з альгебраічнымі коэфіцыентамі.

Мноства **M** ёсьць, як мы гэта пакажам, частка базіснага мноства Hamel'я. Мабыць, конструкцыю лікаў мноства **M** магчыма спросьціць. Але я яе толькі дзеля таго абраў гэткім чынам, каб атрымаць істотныя ўласьціваасьці гэтых лікаў амаль бяз доваду, гэтак сказаць у аднэй хвілі.

Няхай будзе α — некаторы рэчаісны ірацыянальны лік гэткі, што

$$(1) \qquad \frac{8}{10} \leq \alpha \leq \frac{9}{10} \; ..$$

Напішам α ў дзесятковай сыстэме:

$$(2) \qquad \alpha = 0,\ a_1\ a_2\ \ldots\ldots\ a_n\ \ldots\ldots$$

дзе $a_n = 0, 1, 2, \ldots\ldots 9$. Кожнаму α прывядзем у адпаведнасьць пасьлядоўнасьць цэлых лікаў A_1, A_2, ..., A_n, , дзе

$$(3) \qquad A_n = a_1\ 10^{n-1} + a_2\ 10^{n-2} + \ldots\ldots + a_n = \\ = (a_1,\ a_2\ a_3\ a_n)$$

і лік H_α, дзе

$$(4) \qquad H_\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{10^{10^{A_n}!}}$$

Мноства лікаў H_α, якое мы азначым праз **M**, мае магутнасьць контынуўму, таму што калі $\alpha \neq \beta$, дык таксама [1]) $H_\alpha \neq H_\beta$.

1. Калі $H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}, \ldots\ldots H_{\alpha_r}$ ёсьць r—розных паміж сабою лікаў (4) і калі

$$(4') \quad H_{\alpha_k} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{10^{10^{A_m^{(k)}!}}} \;;\; k = 1_1\ 2 \ldots\ldots r$$

тады магчыма абраць гэткае вялікае n, што для ўсіх $m \geqslant n$ члены

$$(5) \quad \frac{1}{10^{10^{A_m^{(k)}!}}} \;;\; k = 1,\ 2, \ldots\ldots r$$

лікаў $H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}, \ldots\ldots H_\alpha$ усе паміж сабою няроўныя. Сапраўды, усе r лікаў H_{α_r} розныя паміж сабою, значыцца, і ўсе лікі $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_r$ розныя між сабою і існуе гэткі лік n, што для ўсіх $m \geqslant n$ усе лікі (3):

(6) $A_m^{(1)}, A_m^{(2)}, \ldots\ldots A_m^{(r)}$; $m \geqslant n$ усе розныя паміж сабою, а значыцца, розныя між сабой і лікі (5).

II. Калі адзін з лікаў H_α памножым на цэлы лік G, дзе

(7) $G = (g_1\, g_2 \ldots\ldots g_h) = g_1\, 10^{h-1} + g_2\, 10g - 2 + \ldots\ldots + g_h\ g_k = 0, 1, 2, \ldots\ldots 9\ (k = 1, 2, \ldots\ldots h)$, тады ў ліку $G.H_\alpha$ ёсьць наступныя члены:

$$(8) \quad \frac{g_1}{10^{h-1+10^{A_n!}}},\ \frac{g_2}{10^{h-2+10^{A_n!}}},\ \frac{g_h}{10^{10^{A_n!}}}\ (n=1,2\ldots.)$$

У (8) некаторыя нумары выступаюць па некалькі разоў.

---

[1]) Сапраўды, калі $\alpha \neq \beta$ і $\alpha = 0,\ a_1\, a_2 \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$, $\beta = 0,\ b_1\, b_2 \ldots\ldots \ldots b_n \ldots\ldots$, тады існуе гэткі цэлы лік m, што $a_m \neq b_m$. Тады, для ўсіх $p \geqslant m$. $A_p \neq B_p$.

Але існуе гэткі лік N, што для ўсіх $n > N$ усе назоўнікі ў (8) розныя паміж сабою.

Назавем N чыстым лікам ад $G \cdot H_\alpha$. Існаваньне чыстага ліку вынікае непасрэдна з спосабу пабудаваньня гэтых лікаў.

1. Заўвага: Паняцьце чыстага ліку N магчыма лёгка пашырыць на канечную колькасьць лікаў $G^{(1)} H_{\alpha_1}$, $G^{(2)} H_{\alpha_2} \ldots$ $G^{(r)} H_{\alpha_r}$, калі $G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots G^{(r)}$. ёсьць цэлыя лікі і $H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}, \ldots H_{\alpha_r}$ розныя паміж сабой ліні (4) [2]).

Азначым тады лік N, як чысты лік ад лікаў $G^{(1)} H_{\alpha_1}$, $G^{(2)} H_{\alpha_2}, \ldots G^{(r)} H_{\alpha_r}$.

З паняцьця чыстага ліку вынікае наступная тэорэма:

1. Тэорэма: *Няхай будуць $H_{\beta_1}, H_{\beta_2}, \ldots, H_{\beta_r}$ — канечная колькасьць розных лікаў з мноства m, тады суадносіна*

$$\sum_{h=1}^{r} G^{(h)} H_{\beta_h} = O \tag{9}$$

дзе $G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots G^{(r)}$ цэлыя дадатныя або адмоўныя лікі, толькі тады магчыма, калі ўсе цэлыя лікі

$$G^{(1)} = G^{(2)} = \ldots = G^{(r)} = O \tag{10}$$

роўны O.

---

[2]) Няхай ўсе лікі $G^{(1)}, G^{(2)} \ldots G^{(r)}$ дадатныя N — чысты лік ад $G^{(h)} H_{\alpha_h}$ ($h = 1, 2 \ldots r$). Пабудуем лік $\sum_{h=1}^{r} G^{(h)} H_{\alpha_h}$, тады ўсе члены (8) лікаў: $G^{(h)} H_{\alpha_h}$ для $n > N$ будуць знаходзіцца ў ліку $\sum_{h=1}^{r} {}^{(h)} H_{\alpha_h}$ таму што, згодна азначэньню чыстага ліку, гэтыя члены, пры складаньні, ня могуць узаемна зьнішчацца.

Довад: Калі ня ўсе $G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots G^{(r)}$ роўны О, тады частка з іх, прыкладам $G^{(i_1)}, G^{(i_2)} \ldots G^{(i_k)}$ дадатны, а $G^{(j_1)}, G^{(j_2)} \ldots G^{(i_t)}$ адмоўны, усе-ж астатнія роўны О.

Тады было-б:

$$(11) \qquad \sum_{h=1}^{k} G^{(i_h)} H_{\beta_{i_h}} = - \sum_{p-1}^{t} G^{(j_p)} H_{\beta_{i_p}}$$

Але з паняцьця чыстага ліку N і лікаў $G^{(i)} H_{\beta_{t_1}} \ldots G^{(i_t)} H_{\beta_{i_t}} \ldots$ вынікае існаваньне, у гэтым выпадку, гэткіх членаў (8) у $G^{(i_h)} H_{\beta_{i_k}}$, якія знаходзяцца таксама і ў ліку $\sum_{h=1}^{t} G^{(i_h)} H_{\beta_{i_h}}$ [3]), але якія не знаходзяцца ў ліках — $G^{(j_p)} H_{\beta_{j_p}}$ (такім чынам у ліку — $\sum_{p=1}^{t} G^{(j_p)} H_{\beta_{j_p}}$). Але гэта немагчыма. Значыць, неабходна, каб усе $G^{(1)}, G^{(2)} \ldots G^{(r)}$ былі роўны О. Ш. п. д.

Заўвага: Тэорэма 1 правідлова таксама для рацыянальных лікаў [4]). Адсюль вынікае 2. тэорэма.

2. Тэорэма. *Лікі H_α мноства т утвараюць частку мноства Hamel'я* [5]).

---

[3]) Вынікае непасрэдна з 2).

[4]) Гэта відавочна, калі памножыць усе назоўнікі лікаў $G^{(1)}, G^{(2)} \ldots G^{(r)}$ на супольны найменшы кратны.

[5]) Гл. Hamel: Math. Annalen 60, p 459, C. Burstin, Die Spaltung des Kontinuums ..... Sitzungsberichte der Akad. Wissen. in Wien 1916, Math.—Natur—Klasse Abt. II. a. 125, Heft.

III. Няхай H_{α_1} H_{α_2}, ... H_{α_r} лікі (4) мноства m (якія таксама могуць быць роўны часткова), дзе

$$(12)\qquad H_{\alpha_p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{10^{A_n^{(p)}!}}} \quad p = 1, 2, \ldots\ldots r$$

Утворым здабытак гэтых лікаў:

$$(13)\qquad H_{\alpha_1} H_{\alpha_2} \ldots\ldots H_{\alpha_r} =$$

$$= \sum_{n_1 n_2 \ldots n_r = 1}^{\infty} \frac{1}{10^{10^{A_{n_1}^{(1)}!} + 10^{A_{n_2}^{(2)}!} + \ldots\ldots 10^{A_{n_r}^{(r)}!}}}$$

Няхай m некаторы цэлы лік членаў у суме (13) непасрэдна папярэдні (13') больш 2 r N, выдавочна з (1) і (13), што член:

$$(13')\qquad \frac{1}{10^{10^{A_m^{(1)}!} + 10^{A_m^{(2)}!} + \ldots\ldots 10^{A_m^{(r)}!}}}$$

у суме (13) знаходзіцца толькі адзін раз. Калі $A_m^{(h)}$ найбольшы з r лікаў:

$A_m^{(1)}, A_m^{(2)}, \ldots\ldots A_m^{(r)}$; $A_{m+1}^{(k)}$ найменшы з r лікаў: $A_{m+1}^{(1)}$, $A_{m+1}^{(2)}$, ... $A_{m+1}^{(r)}$

тады:

$$(13'')\qquad \frac{1}{10^{10^{A_m^{(1)}!} + \ldots\ldots + 10^{A_{m-1}^{(h)}!} + \ldots\ldots 10^{A_m^{(r)}!}}}$$

зьяўляецца членам, які ў суме (13) ідзе непасрэдна перад (13'), а:

$$(13''')\qquad \frac{1}{10^{10^{A_1^{(1)}!} + 10^{A_1^{(2)}!} + \ldots 10^{A_{m+1}^{(k)}!} + \ldots 10^{A_1^{(r)}!}}}$$

зьяўляецца членам, які ў суме (13) ідзе непасрэдна перад (12'').

[6]) Відавочна, што кожны іншы член альбо больш (13'), альбо менш (13''), калі $m > 2\,r\,N$.

Адсюль вынікае, што калі напісаць цяпер (13) у дзесятковай сыстэме, чым больш будзе m, тым менш робіцца членаў, якія адрозьніваюцца ад нуля [7]).

Тое-ж самае задавальняецца для лікаў $G\, H_{\alpha_1} \cdot H_{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot H_{\alpha_r}$, дзе G некаторы цэлы лік [8]).

IV. Адзначым праз $H_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}$ здабытак: $H_{\alpha_1} \cdot H_{\alpha_2} \ldots \ldots H_{\alpha_r}$. Тады з папярэдніх разважаньняў вынікае непасрэдна, што: калі

$$(14)\quad H_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r} = H_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_s}.$$

тады па-першае $r = s$ і па-другое да кожнага ліку H_{α_k} ($k = 1, \ldots r$) існуе такі лік $H_{\beta_{\overline{k}}}$, што:

$$(15)\qquad H_{\alpha_k} = H_{\beta_{\overline{k}}}$$

Сапраўды, возьмем які-небудзь лік $m > 2\,(r+s)\,N$ член

$$(15')\qquad \frac{1}{10^{10^{A_m^{(1)}!} + 10^{A_m^{(2)}!} + \ldots \ldots 10^{A_m^{(r)}!}}}$$

У $H_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}$, тады згодна (14) у $H_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_s}$ неабходна павінен быць член роўны члену (15'). З павялічэньня назоўнікаў членаў ліку (14), і з (1), (3) вынікае, што гэта можа быць толькі член:

$$(15'')\qquad \frac{1}{10^{10^{B_m^{(1)}!} + 10^{B_m^{(2)}!} + \ldots \ldots 10^{B_m^{(b)}}}};$$

З папярэдняга і суадносіны $m > 2\,(r+s)\,N$ вынікае непасрэдна, што (15') толькі тады можа быць роўны (15''), калі $r = s$ і калі для кожнага ліку k існуе гэткі лік $\overline{k}$, што

$$(15''')\qquad A_m^{(k)} = B_m^{(\overline{k})}$$

7) З $m > 2\,r\,N$ вынікае, што $10^{10^{A_{m+1}^{(k)}!}} > 10^{10^{A_1^{(1)}!} + \ldots \ldots 10^{A_1^{(r)}}}$ і што (13''') ёсьць найбольшы з членаў (13) (з найменшым назоўнікам), які больш назоўніка (13') і які ідзе ў (13) непасрэдна за (13').

8) Паміж (13') і (13''), а таксама паміж (13') і (13''') ляжаць мінімум $10^{A_{m-1}^{(h)}!}$ нулей.

Але таму што (15''') задавальняецца для кожнага $m > 2 \cdot (r + s)$, адсюль вынікае (15).

Такім чынам, магчыма паказаць, што калі:

$$(15\ \mathrm{IV})\quad G^{(1)} H_{\alpha_1\, \alpha_2\, \ldots\ldots\, \alpha_r} = G^{(2)} H_{\beta_1\, \beta_2\, \ldots\ldots\, \beta_s}$$

дзе $G^{(1)}, G^{(2)}$ цэлыя лікі, тады:

$$(15\ \mathrm{V})\qquad G^{(1)} = G^{(2)}$$

і тады задавальняецца акрамя гэтага (15).

V. Калі дамо t розных паміж сабою здабыткаў $H_{\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_r}$, $H_{\beta_1\, \beta_2\, \ldots\ldots\, \beta_s}$ ..... $H_{\tau_1\, \tau_2\, \ldots\ldots\, \tau_\varsigma}$ і $G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots\ldots G^{(\tau)},$ некаторыя цэлыя лікі, тады суадносіна

$$(13)\quad G^{(1)} H_{\alpha_1\, \alpha_2\, \ldots\ldots\, \alpha_r} + G^{(2)} H_{\beta_1\, \beta_2\, \ldots\ldots\, \beta_s} + \ldots\ldots + G^{(\tau)} H_{\tau_1\, \tau_2\, \ldots\ldots\, \tau_\varsigma} = 0$$

магчыма толькі, калі ўсе $G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots\ldots, G^{(\tau)},$ ідэнтычна роўны нулю. Сапраўды, няхай $m > 2\,(r + s + \ldots\ldots + p + r_1 + s_1 + . + p_1)\,N$, дзе $G^{(1)}$ r_1—цыфравы, $G^{(2)},$ r_2—цыфры і $G^{(\tau)}$ p_1—цыфравы лік. Тады відавочна, што ў кожным ліку $G^{(1)} H_{i_1\, 2\, \ldots\ldots\, l_1}$ сумы (16) ёсьць член:

$$(16')\qquad \frac{G_l^{(i)}}{10^{10^{A_m^{(i_1)}!}} + \ldots + 10^{A_m^{(i_3)}!} + \ldots + 10^{A_m^{(i_l)}!}}$$

які не знаходзіцца ў іншым ліку гэтай сумы [9]).

З I, II, III, IV вынікае 3 тэорэма:

3 тэорэма: *Ня існуе ніякага рацыянальнага стасунку з рацыянальнымі коэфіцыентамі паміж лікамі* **M**.

---

[9]) Калі G ёсьць p—цыфравы лік, тады сярод лікаў, памножаных на G у дзесятковым дробу ёсьць ва ўсякім выпадку $10^{A_{m-1}^{(h)}!} - 2p$ нулёў, дзе $m > 2\,(r + p)\,N$.

Магчыма, што неабходна абраць яшчэ больш. Але яго магчыма заўсёды абраць такім вялікім, што член (17') знаходзіцца толькі ў ліку.

Довад: Кожны рацыянальны стасунак паміж n вялічынямі: $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$, з рацыянальнымі коэфіцыентамі магчыма напісаць у выглядзе:

$$(17) \qquad \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=0}^{h} A_{k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} = 0$$

дзе $A_{k_1 k_2} \ldots A_{k_n}$ цэлыя лікі [10]).

Значыць, калі-б існаваў стасунак (17) паміж лікамі мноства **M**, дзе $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ... $x_n = \alpha_n$, тады мы мелі-бы наступны стасунак

$$(17') \qquad \sum_{k_1+k_2+\ldots k_n=0}^{h} A_{k_1 k_2 \ldots k_n} H \underbrace{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_1}_{k_1} \underbrace{\alpha_2 \alpha_2 \ldots \alpha_2}_{k_2} \ldots \underbrace{\alpha_n \alpha_n \ldots \alpha_n}_{k_n} = 0$$

З V вынікае такім спосабам, як і пры довадзе тэорэмы 1, што (17') толькі тады магчыма, калі ўсе коэфіцыенты.

$$(17) \qquad A_{k_1 k_2 \ldots\ldots k_n} = 0$$

Такім чынам, ніякі рацыянальны стасунак немагчымы паміж лікамі мноства **M**.

З 3 тэорэмы вынікае: паміж лікамі мноства **M** *немагчымы рацыянальны стасунак з альгебраічнымі коэфіцыентамі.*

Довад: З рацыянальнага стасунку з альгебраічнымі коэфіцыентамі.

$$(18) \qquad \sum_{k_1+k_2+\ldots k_n=0}^{p} B_{k_1 k_2 \ldots\ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} = 0$$

(дзе $B_{k_1 k_2 \ldots\ldots k_n}$ альгебраічныя лікі), вынікае наступны рацыянальны стасунак:

$$(19) \qquad \sum_{l_1+l_2+\ldots l_n=0}^{q} L_{l_1 l_2 \ldots l_n} x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}$$

---

[10]) Адпаведным множаньнем магчыма адвольную рацыянальную функцыю прывесьці ў форму (16).

(дзе $L_{l_1 l_2 \ldots\ldots l_n}$ рацыянальныя лікі, ня роўныя нулю) [11]).

Але стасунак (19) паміж лікамі мноства **M** можа мець месца толькі ў тым выпадку (згодна тэорэме 3), калі ўсе коэфіцыенты:

$L_{l_1 l_2 \ldots\ldots l_n}$ роўны нулю. Але гэта супярэчыць (18). Значыць усе

$B_{\kappa_1 \kappa_2 \ldots\ldots \kappa_n}$ павінны = O.

Ш. п. д.

---

[11]) (I) $f(A_1, A_2, \ldots\ldots A_r, X_1 X_2 \ldots\ldots X_n) = O$ няхай будзе рацыянальная функцыя зьменных: $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ з альгебраічнымі коэфіцыентамі: $A_1 A_2 \ldots\ldots A_r$ і A_h $(h = 1, 2 \ldots\ldots r)$ будуць разьвязкі няпрыводнага альгебраічнага раўнаньня $\varphi_h(x) = \varphi_h(A_h) = O$ ступені n_h з цэлымі коэфіцыентамі. Створым спрэжаныя да A_h разьвязкі: $A_h^{(1)}, A_h^{(2)} \ldots\ldots A_h^{(1_h)}$ $(A_h = A_h^{(1)})$; роўнасьці: $f(A_1^{(p_1)} A_2^{(p_2)} \ldots\ldots A_n^{(p_r)}, x_1, x_2 \ldots x_n) = f_{p_1 p_2 \ldots p_r}$; $p_h = 1, 2 \ldots\ldots n_h$; $h = 1, 2, \ldots\ldots r$. Гэтых роўнасьцяў ёсьць $n_1, n_2 \ldots\ldots n_r$. Створым цяцер здабытак усіх гэтых $n_1 n_2 \ldots\ldots n_r$ роўнасьцяў:

$$\text{(II)}\quad \Pi\,(f_{p_1 p_2 \ldots\ldots p_r}) = F(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n) \quad 11)$$

Тады $F(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n)$, згодна I, роўна нулю. З таго, што (II) не зьмяняе свайго значэньня пры ўсіх магчымых $A_h^{(\kappa)} \rightarrow A_h^{(s)}$ вынікае, што коэфіцыенты (II) павінны рацыянальна выражацца праз коэфіцыенты раўнаньняў $\varphi_h(x) = O$, а значыць, і самі зьяўляцца рацыянальнымі. (Гл. O. Perron, Algebra). Такім чынам, з (18) вынікае (19).

Ein mengentheoretischer Beitrag zur Arithmetik.

Von C. Burstin in Minsk.

In dieses kurzen Note wird eine Menge **M** von reellen Zahlen konstruiert, zwischen denen keine rationalen Beziehungen mit algebraischen Koeffizienten bestehen können. Die Menge **M** ist, wie wir nebenbei zeigen, eine Teilmenge einer Hamel'schen Basismenge. Es ist möglich, dass man die Konstruktion der Zahlen der Menge **M** vereinfachen kann; ich habe sie nur deshalb so gewählt, um die wesentlichen Eigenschaften dieser Zahlen fast ohne Beweise, sozusagen augenscheinlich zu erhalten.

Ist α irgendeine reelle irrationale Zahl von der Eigenschaft, dass

$$(1) \qquad \frac{8}{10} < \alpha < \frac{9}{10}$$

ist, dann schreiben wir α im dekadischen System:

$$(2) \qquad \alpha = 0\, a_1\, a_2 \,\ldots\ldots\, a_n \,\ldots\ldots$$

wobei $a_n = 0, 1, 2, \ldots\ldots 9$, ist. jeder Zahl α ordnen wir eine Folge von ganzen Zahlen $A_1, A_2 \ldots\ldots A_n \ldots\ldots$ zu, wobei

$$(3) \qquad A_n = a_1\, 10^{n-1} + a_2\, 10^{n-2} + \ldots\ldots + a_n = (a_1, a_2, \ldots \ldots a_n)$$

ist, und eine Zahl H_α, wobei

$$(4) \qquad H_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{10^{A_n!}}} \text{ ist.}$$

Die Menge der H_α Zahlen, die wir mit **M** bezeichnen ist von der Mächtigkeit des Kontinuums, da wenn $\alpha \neq \beta$ ist, dann ist auch $H_\alpha \neq H_\beta$ [1]).

I. Sind H_{α_1}, H_{α_2} ..... H_{α_r} — r — zu je zwei von einander verschiedene Zahlen (4) und ist

$$(4') \quad H_{\alpha_k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{10^{A_n^{(k)}!}}}, \quad k = 1, 2 \ldots\ldots r$$

dann können wir n so gross wählen, dass für alle $m \geqq n$ Glieder

$$(5) \quad \frac{1}{10^{10^{A_m^{(k)}!}}}, \quad k = 1, 2. \ldots\ldots r$$

der Zahlen H_{α_1}, H_{α_2} ..... H_{α_r} zu je zwei von einander verschieden sind. In der Tat, da alle Zahlen H_{α_k} von einander verschieden sind, sind auch alle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_r$ von einander verschieden und es gibt eine Zahl n von der Art, dass für alle $m \geqq n$ alle Zahlen (3)

(6) $A_m^{(1)}$, $A_m^{(2)}$ ..... $A_m^{(r)}$ $m \geqq n$, zu je zwei von einander verschieden sind also auch die Zahlen (5).

II. Wenn wir eine Zahl H_α mit einer ganzen Zahl G multiplizieren, wobei

(7) $G = (g_1\ g_2 \ldots\ldots g_h) = g_1\, 10^{h-1} + g_2\, 10^{h-2} + \ldots + g_h$

ist, $g_k = 0, 1, \ldots\ldots 9$, $(k = 1, 2 \ldots\ldots h)$, dann kommen in der Zahl $G \,.\, H_\alpha$ folgende Gleider vor:

$$\frac{g_1}{10^{h-1+10^{A_n}!}}, \quad \frac{g_2}{10^{h-2+10^{A_n}!}}, \ldots\ldots \frac{g_h}{10^{10^{A_n}!}} \quad (n=1, 2, \ldots\ldots)$$

---

[1]) In der Tat ist $\alpha \neq \beta$ und ist $\alpha = 0.\ a_1\ a_2 \ldots a_n \ldots$; $\beta = 0\ b_1, b_2 \ldots b_n \ldots$, dann existiert eine ganze Zahl m, von der Art, dass $a_m \neq b_m$ ist. Dann ist aber für alle $p \geqq m$. $A_p \neq B_p$.

Unter den Nummern von (8) kommen mehrere vielfach vor. Es gibt aber eine Zahl N von der Art, dass für alle $n \geqq N$ alle Nenner von (8) zu je zwei von einander verschieden sind.

Die Zahl N bezeichnen wir als eine reine Zahl von $G \cdot H_\alpha$. Die Existenz der reinen Zahl folgt unmittelbar aus der Konstruktion der Zahlen.

1. Bemerkung: Den Begriff der reinen Zahl N kann man ohneweiter auf endlich veile Zahlen $G^{(1)} H_{\alpha_1}$, $G^{(2)} H_{\alpha_2}$, ... $G^{(r)} H_{\alpha_r}$ erweitern, wenn $G^{(1)}, G^{(2)} \ldots\ldots G^{(r)}$ ganze Zahlen und $H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}, \ldots\ldots H_{\alpha_r}$ zu je zwei von einander verschiedene Zahlen (4) sind [2]).

Wir bezeichnen dann die Zahl N als die reine Zahl der Zahlen $G^{(1)} H_{\alpha_1}, G^{(2)} H_{\alpha_2}, \ldots\ldots G^{(r)} H_{\alpha_r}$. Aus dem Begriff der reinen Zahl folgt der folgende Satz:

1. Satz: *Sind $H_{\beta_1}, H_{\beta_2} \ldots\ldots H_{\beta_r}$ irgendwelche (endlichviele) von einander verschiedene Zahlen der Menge* **M**, *dann ist eine Beziehung:*

$$(8) \qquad \sum_{h=1}^{r} G^{(h)} H_{\beta_h} = 0$$

wobei $G^{(1)}, G^{(2)} \ldots\ldots G^{(r)}$ ganze positive oder negative Zahlen nur dann möglich sind, wenn alle ganze Zahlen.

$$(10) \qquad G^{(1)} = G^{(2)} = \ldots\ldots G^{(r)} = 0 \text{ sind.}$$

Beweis: In der Tat wären nicht alle Zahlen $G^{(1)}, \ldots\ldots G^{(r)}$ Null, dann wäre ein Teil von ihnen, z. B. $G^{(i_1)}, G^{(i_2)}, \ldots\ldots G^{(i_k)}$

---

[2]) Sind alle Zahlen $G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots\ldots G^{(r)}$ positiv und ist N die reine Zahl der Zahlen $G^{(h)} H_{\alpha_h}$ $(h = 1, 2 \ldots. r)$ und bilden wir die Zahl $\sum_{h=1}^{r} G^{(h)} H_{\alpha_h}$, so kommen dann alle Glieder (8) der Zahlen $G^{(h)} H_{\alpha_h}$ für $n \geqq N$ in der Zahl $\sum_{h=1}^{r} G^{(h)} H_{\alpha_h}$ vor, da sich zufolge der Definition der reinen Zahl, diese Glieder bei der Addition nicht gegenseitig zerstören können.

positiv und $G^{(j_1)}, G^{(j_2)} \ldots\ldots G^{(j_t)}$ negativ, alle übrigen dagegen Null. Dann wäre.

$$(11) \qquad \sum_{h=1}^{k} G^{(i_h)} H_{\beta_{i_h}} = - \sum_{p=1}^{t} G^{(j_p)} H_{\beta_{j_p}}$$

Aus dem Begriff der reinen Zahl N und der Zahlen $G^{(i_1)} H_{\beta_{i_1}} \ldots\ldots G^{(t_t)} H_{\beta_{i_t}}$ müsste dann die Existenz eines Gliedes (8) in $G^{(i_h)} H_{\beta_{i_h}}$ folgen, welches auch dann in der Zahl $\sum_{h=1}^{t} G^{(i_h)} H_{\beta_{i_h}}$ vorkommt [3]), welches aber in der Zahlen — $- G^{(j_p)} H_{\beta_{j_p}}$ (also auch inder Zahl — $\sum_{p=1}^{t} G^{(j_p)} H_{\beta_{j_p}}$) nicht vorkommt. Dies ist aber unmöglich. Es müssten also alle Zahlen $G^{(1)}, G^{(2)} \ldots\ldots G^{(r)}$ Null sein, w. z. b. w.

Bemerkung: Der 1. Satz gilt auch für rationale Zahlen $G^{(1)}, G^{(2)} \ldots\ldots G^{(r)}$ [4]).

Es folgt also darauf der 2 Satz:

2. Satz: *Die Zahlen H_α der Menge* **M** *bilden eine Teilmenge einer Hamelschen Menge* [5]).

III. Es seien nun $H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}, \ldots\ldots H_{\alpha_r}$ Zahlen (4) der Menge M (die auch zum Teil gleich sein können), wobei

$$(12) \qquad H_{\alpha_p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{10^{A_n^{(p)}!}}} \; ; \; p = 1, 2, \ldots\ldots r$$

ist, dann bilden wir das Produkt dieser Zahlen

$$(13) \qquad H_{\alpha_1} . H_{\alpha_2} \ldots\ldots H_{\alpha_r} =$$

---

[3]) Folgt unmittelbar ans 2).

[4]) Dies wird unmittelbar klar, indem man durch das kleinste gemeinsame Vielfache aller Nenner der Zahlen $G^{(1)} G^{(2)} \ldots\ldots G^{(t)}$ multipliziert.

[5]) Siehe G. Hamel: Math. Annalen 60 p 459: C. Burstin: Die Spaltung des Kontlinuums ..... Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien 1916. Math. Natur—Klasse Abt. II. a, Bd. 25, 3 Heft.

$$= \sum_{n_1, n_2, \dots n_r = 0}^{\infty} \frac{1}{10^{10^{A^{(1)}_{n_1}!} + 10^{A^{(2)}_{n_2}!} + \dots\dots + 10^{A^{(r)}_{n_r}!}}}$$

Es sei nun m irgend eine ganze Zahl grösser als 2 r N, (wobei N eine reine Zahl unserer Zahlen ist), dann sieht man ohneweiters zufolge (1) und (3), das Glied

$$(13') \qquad \frac{1}{10^{10^{A^{(1)}_{m}!} + 10^{A^{(2)}_{m}!} + \dots\dots 10^{A^{(r)}_{m}!}}}$$

in der Summe (13) nur einmal vorkommt. Ist $A^{(h)}_{m-1}$ die grösste der r Zahlen $A^{(1)}_{m-1}$ $A^{(2)}_{m-1}$ .... $A^{(r)}_{m-1}$ und $A^{(k)}_{m+1}$ die kleinste der r Zahlen $A^{(1)}_{m+1}$, $A^{(2)}_{m+1}$, ... $A^{(r)}_{m+1}$, so ist

$$(13'') \qquad \frac{1}{10^{10^{A^{(1)}_{m}!} + \dots\dots + 10^{A^{(h)}_{m-1}!} + \dots\dots 10^{A^{(r)}_{m}!}}}$$ [6])

das unmittelbar vor (13') in der Summe (13) vorkommende Glied und

$$(13''') \qquad \frac{1}{10^{10^{A^{(1)}_{1}!} + 10^{A^{(2)}_{1}!} + \dots 10^{A^{(k)}_{m+1}!} + \dots 10^{A^{(r)}_{1}!}}}$$

das ummittelbar nach (13'') in der Summe (13) vorkommende Glied.

Schreibt man also die Zahl (13) im dekadischen System, so folgt daraus, dass je grösser m wird, desto seltener von Null verschiedene Glieder vorkommen [7]). Dasselbe gilt auch für die

---

[6]) Man sieht, dass jedes andere Glied entweder grösser wie (13') oder kleiner als (13'') ist, da m $>$ 2 r N ist.

[7]) Da m $>$ 2 r N ist, so sieht man, dass $10^{10^{A^{(k)}_{m+1}!}} > 10^{10^{A^{(1)}_{1}!} + 10^{A^{(2)}_{1}!} + \dots\dots + 10^{A^{(r)}_{1}!}}$ und dass also (13''') das grösste (mit kleinsten Nenner) welcher grösser als der Nenner von (13' ist) Glied in (13) ist, welches in (13) nach (13') folgt.

Zahlen $G . H_{\alpha_1} . H_{\alpha_2} \ldots\ldots H_{\alpha_r}$, wobei G irgendeine ganze Zahl ist [8]).

IV. Bezeichnen wir mit $H_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_r}$ das Produkt $H_{\alpha_1} . H_{\alpha_2} \ldots\ldots H_{\alpha_r}$ und $H_{\underbrace{\alpha_1 \alpha_1 \ldots \alpha_1}_{k}} = \left(H_{\alpha_1}\right)^k$, so folgt dann aus den vorhergehenden Betrachtungen unmittelbar, dass wenn

(14) $$H_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_r} = H_{\beta_1 \beta_2 \ldots\ldots \beta_s}$$

(ist, dann erstens $r = s$ und zweitens zu jeder Zahl H_{α_κ} ($k = 1, 2, \ldots\ldots r$,) eine Zahl $H_{\beta_{\bar{\kappa}}}$ existiert, sodass

(15) $$H_{\alpha_\kappa} = H_{\beta_{\bar{\kappa}}} \text{ ist.}$$

In der Tat, nehmen wir irgendeine Zahl $m > 2\,(r+s)\,N$, iwobei N eine reine Zahl unserer Zahien ist) und ein Glied

(15') $$\frac{1}{10^{10^{A_m^{(1)}!} + \ldots\ldots + 10^{A_m^{(r)}!}}}$$

in $H_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_r}$, so muss zufolge (14) in $H_{\beta_1 \beta_2 \ldots\ldots \beta_r}$ ein dem Gliede (15') gleiches Glied vorkommen. Aus dem Wachstum der Nenner aer Glieder der Zahl (14) und zufolge (1), (3) folgt, dass dies nur das Glied

(15'') $$\frac{1}{10^{10^{B_m^{(1)}!} + \ldots\ldots + 10^{B_m^{(s)}}}}.$$

sein kann. Aus der Relation $m > 2\,(r+s)\,N$ und dem vorhergehenden folgt dann unmittelbar, dass (15') nur dann gleich (15'') sein kann, wenn $r = s$ und wenn zu jeder Zahl eine Zahl $\bar{k}$ existiert, sodass (15''') $A_m^{(k)} = B_m^{(\bar{k})}$ und da (15''') für jedes $m > 2\,(r+s)$ gilt, so folgt daraus (15).

---

[8]) Zwischen (13') und (13'') resp—(13''') liegen mindestens $10^{A_{m+1}^{(h)}!}$ Nullen.

Auf diese Art beweist man, dass wenn

$$(15^{IV})\quad G^{(1)} H_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_r} = G^{(2)} H_{\beta_1 \beta_2 \ldots\ldots \beta_s}$$

ist, wo $G^{(1)}, G^{(2)}$ ganze Zahlen darstellen, dass dann

$(15^{V})\quad G^{(1)} = G^{(2)}$ ist und ausserdem dass dann die Beziehung (15) gilt.

V. Sind t irgendwelehe Produkte $H_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_r}$, $H_{\beta_1 \beta_2 \ldots\ldots \beta_s}$, ..., $H_{\tau_1 \tau_2 \ldots\ldots \tau}$ gegeben, welche zu je zwei einander verschieden sind, und sind $G^{(1)}, G^{(2)}, G^{(\tau)}$ irgendwelche ganze Zahlen ist die Beziehung:

$$(16)\quad G^{(1)} H_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_r} + G^{(2)} H_{\beta_1 \beta_2 \ldots\ldots \beta_s} + \ldots\ldots + G^{(t)} H_{\tau_1 \tau_2 \ldots\ldots \tau_p} = O$$

nur dann möglich, wenn alle ganze Zahlen $G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots G^{(\tau)}$ identisch Null sind. In der Tat, sei $m > 2\,(r + s + \ldots . p + r_1 + s_1 + \ldots . p_1)\,N$, wobei $G^{(1)}$ r_1—ziffrig $G^{(2)}$ s_1—ziffrig und $G^{(t)}$ p_1—ziffrig ist, so sieht man dann ohneweiters, dass in jeder Zahl $G^{(i)} H_{i_1 i_2 \ldots . i^l}$, der Summe (16) ein Glied

$$(16')\quad \frac{G_1^{(i)}}{10^{10^{A_m^{(i_1)}!} + 10^{A_m^{(i_2)}!} + \ldots\ldots 10^{A_m^{(i_l)}!}}}$$

vorkommt, welches sonst in keiner anderen Zahl Summe (16) vorkommt [9]).

Aus I, II, III, IV, folgt der 3. Satz:

3. Satz: *Es gibt keine rationelle Beziehung mit rationalen Koeffizienten zwischen der Zahlen der Menge* **M**.

---

[9]) Ist G eine p—ziffrigc Zahl, so liegen zwischen ben mit G multiplizierten Zahlen (13'), (13''), (14''') im dekadischen Bruch, mindestens $10^{A_{m-2}^{(h)}!} - 2\,p$ Nullen wenn $m > 2\,(r + p)\,N$ ist.

Es tst möglich, dsss man noch grösser wählen muss; man kann aber auf jeden Fall ihn so gross wählen, dass das Glied (16') nur in der Zahl vorkommt.

Beweis: Iede rationale Beziehung zwischen n Grössen $x_1 x_2 \ldots x_n$ mit rationalen Koeffizienten kann man auf die Form

$$(17) \qquad \sum_{k_1+k_2+\ldots k_n=o}^{h} A_{k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} = O$$

schreiben, wobei $A_{k_1 k_2 \ldots \ldots k_n}$ ganze Zahlen sind [10]).

Existierte also eine Beziehung (17) zwischen Zahlen der Menge **M**, sodass $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2 \ldots \ldots x_n = \alpha_n$ ist so hätten wir dann eine Beziehung:

$$(17') \qquad \sum_{k_1+k_2+\ldots k_n=o}^{h} A_{k_1 k_2 \ldots k_n} H \underbrace{\alpha_1 \alpha_1 \ldots \alpha_1}_{k_1} \underbrace{\alpha_2 \alpha_2 \ldots \alpha_2}_{k_2}, \ldots \ldots \underbrace{\alpha_n \alpha_n \ldots \alpha_n}_{k_n} = O$$

Aus V folgern wir auf dieselbe Weise, wie beim Beweis des, 1. Satzes. dass (17') nur dann bestehen kann, wenn alle Koeffizienten von (17') $A_{k_1 k_2 \ldots \ldots k_n} = O$ sind.

Es kann also keine rationelle Bezeiehung mit rationalen Koeffizienten zwischen den Zahlen der Menge **M** bestehen.

Aus dem 3. Satz: *Es gibt keine rationale Beziehung mit algebraischen Koeffizienten zwisschen den Zahlen der Menge* **M** Beweis: Aus jeder ɹationalen Bezeihung mit algebraischen Koeffizienten.

$$(18) \qquad \sum_{k_1+k_2+\ldots k_n=o}^{p} B_{k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} = O$$

($B_{k_1 k_2 \ldots \ldots k_n}$ algebraische Zahien), folgt eine rationale Beziehung.

$$(19) \qquad \sum_{l_1+l_2\ldots+l_c=o}^{q} L_{l_1 l_2 \ldots l_n} x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n} = O$$

($L_{l_1 l_2 \ldots \ldots l_n}$ rationale nicht verschwindende Zahlen) [11]).

---

[10]) Durch entsprechende Multiplikationen kann man jede rationale Funktion auf die Form (16) bringen.

[11]) Ist (I) $f(A_1 A_2 \ldots \ldots A_r X_1 X_2 \ldots \ldots X_n) = O$ eine rationelle Funktion der Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$ mit den algebraischen Koeffizienten $A_1, A_2 \ldots A_n$ und sind A_h ($h = 1, 2 \ldots \ldots r$) Wurzeln der irreduzibien algebraischen Glei, chungen $\varphi_h(x) = \varphi_h(A_h) = O$ vom Grade n_h mit ganzzahligen Koeffizienten

Die Beziehung (19) zwischen den Zahlen der Menge **M** kann aber zufolge 3. Satz, nur dann bestehen, wenn alle Koeffizienten $L_{l_1 l_2 \ldots\ldots l_n}$ Null sind. Es ist das ein Widerspruch gegen unsere Voraussetzung (18). Es müssen also alle $B_{k_1 k_2 \ldots k_2} = O$ sein, w. z. b. w.

---

dann bilden wir die Konjugierten zu A_h Wurzeln $A_h^{(1)}\ A_h^{(2)} \ldots\ A_h^{(1_h)}$ $(A_h = A_h^{(1)})$ und die Beziehungen $f\,(A_1^{(p_1)}\ A_2^{(p_2)} \ldots\ldots A_r^{(p_r)}\ x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n) = f_{p_1\ p_2 \ldots\ldots p_r}$; $p_h = 1, 2 \ldots\ldots n_h$, $h = 1, 2 \ldots\ldots r$. Solcher Beziehungen gibt es $n_1 . n_2 \ldots\ldots n_r$. Bilden wir das Produkt aller dieser $n_1 . n_2 \ldots\ldots n_r$ Beziehungen

$$\text{(II)}\quad \Pi\,(f_{p_1\ p_2 \ldots\ldots p_r}) = F\,(x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n)$$

dann ist $F\,(x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n)$ zufolge (1) gleich Null. Da (11) bei allen möglichchen Substitutionen $A_h^{(k)} \rightarrow A_h^{(s)}$ ihren Wert nicht ändert, so müssen die Koeffizienten von (II) sich rationell ausdrücken lassen durch die Koeffizienten der Gleichungen $\varphi_h\,(x) = O$ also selbst rationell sein (siehe O. Perron: Algebra I). Es folgt also aus (18) die Beziehung (19).

Вагальнік Foucault і сонечны гадзіньнік.

Ч. Дамброўскі ў Менску.

Некаторыя элемантарныя падручнікі космографіі выводзяць формулу вагальніка Foucault:
„скорасьць абароту роўніцы ваганьняў вагальніка адносна мэрыдыану$=15^0 . \mathrm{sn}$ географічнае шырыні (у гадзіну)“
з яўнай нацяжкай, бяручы фігуру, дзе пачатковае ваганьне адбываецца *ў мэрыдыане*, і далей распаўсюджваючы вынікі на агульны выпадак.

Звычайна выводзіцца правільна гэта формула толькі ува ўсеаружжы тэорэтычнай мэханікі, з прыскарэньня Корыоліса.

Я тут даю элемэнтарны правільны довад, абапёрты на формулах сфэрычнай трыгономэтрыі і зьвязаны акрамя гэтага з формулай сонечнага гадзіньніка.

——

Каб гадзіна, якую паказвае сонечны гадзіньнік, не залежала ад дэклінацыі сонца і не зьмянялася на працягу году ад зьмен дэклінацыі сонца, трэба каб цень у гадзіньніку адкідвалася палкай, якая-б ішла ў напрамку восі сусьвету (паралельна восі зямлі, у напрамку да полюсу неба) [1].

Тады кут гэтай цені з паўночным напрамкам на горызонце будзе такі, як кут напрамку да S’ ад месца назіраньня з паўднёвым напрамкам (бо гэтыя куты—вэртыкальныя), дзе S’—перасек вялікай акружыны неба, якая праходзіць праз полюс і сонца, з горызонтам месца назіраньня. Гэты кут ёсьць азымут A пункту S’. Гадзінны кут пункту S’ гэткі самы, як гадзінны кут сонца S, г. зн. $=\Theta$, зэнітная адлег-

[1]) Таму няправільны і ўводзячы ў заблуджэньне быў мэтодычны артыкул тав. Сірачынскага ў адным з №№ „Асьветы“, дзе прапанаваліся надта мэтодычныя, але, на жаль, памылковыя спосабы пабудовы сонечнага гадзіньніка з вэртыкальнай палкай і прадпасылкай аб роўнамэрным руху цені.

ласьць $ZS' = \frac{1}{2}\pi$. Кут Θ залежыць толькі ад (праўдзівай сонечнай) гадзіны і зьмяняецца на працягу дня пропорцыянальна да яе.

Для нейкай данай гадзіны мы маем гэткім чынам у асноўным трыкутнік PZS' (полюс—зэніт—пункт S') бакі $\frac{1}{2}\pi - \varphi$ і $\frac{1}{2}\pi (= ZS')$, дзе φ—географічная шырыня месца назіраньня, і кут проці аднаго з іх Θ; а трэба нам знайсьці кут $\pi - A$.

Дзякуючы таму, што $ZS' = \frac{1}{2}\pi$, у адпаведным полярным сфэрычным трыкутніку будзе просты кут $\pi - ZS' = \frac{1}{2}\pi$. Пабудуем гэты полярны трыкутнік. У ім будуць куты $= \pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi - (\frac{1}{2}\pi - \varphi) = \varphi + \frac{1}{2}\pi$, $\pi - PS'$, і процілежныя бакі $= \pi - \Theta$, $\pi - S'$, $\pi - (\pi - A) = A$.

Гіпотэнуза тутака $\pi - \Theta$, дапаўненьні катэтаў да $\frac{1}{2}\pi$: $\frac{1}{2}\pi - (\pi - S') = S' - \frac{1}{2}\pi$ і $\frac{1}{2}\pi - A$. Нам патрэбна сувязь між Θ, φ і A. З іх у цыклі Нэпэра сярэдні элемэнт $\varphi + \frac{1}{2}\pi$, значыцца, паводле правіла Нэпэра:

$$\cos\ (\varphi + \frac{1}{2}\pi) = \operatorname{cotg}\ (\frac{1}{2}\pi - A) . \operatorname{cotg}\ (\pi - \Theta);$$

г. ё.:

$$- \operatorname{sn}\varphi = \operatorname{tg}A . (-\operatorname{cotg}\Theta) = -\frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}\Theta},$$

альбо:

$$\operatorname{tg}A = \operatorname{tg}\Theta . \operatorname{sn}\varphi \qquad (1)$$

Гэта і ёсьць *формула сонечнага гадзіньніка* [2]).

Цяпер пяройдзем да вагальніка Foucault.

---

[2]) На падставе гэтай фордулы лёгка відаць, што ў тав. Сірачынскага дзеля Менску і дзеля 6-ай гадзіны пры дэклінацыі блізкай да $23\frac{1}{2}^{0}$ атрымалася-б памылка на $1\frac{1}{2}$ гадзін, бо ў яго азымут S' заменены азымутам S, які магчыма знайсьці паводле агульных формул сфэрычнай трыгономэтрыі.

Калі-б зямля не вярцелася адносна „сталых“ зорак, дык, паводле законаў мэханікі, роўніца ваганьня вагальніка была-б сталай адносна зямное паверхні, а напрамак ваганьня пры пераходзе праз вэртыкаль быў-бы заўжды адзін і той самы на зямлі.

Калі гэты напрамак ідзе ў нейкі момант да нейкай зоркі ў горызонце, якая ўсходзіць або заходзіць, дык імкненьне захаваць яго сталым адносна „сталых“ зорак, але аднача-сова ня выводзіць з горызонту, робіць тое, што адносна зямное паверхні напрамак ваганьня абарачаецца з хуткасьцю зьмены *азымуту* гэтай зоркі ў горызонце. Гэтая хуткасьць $= \frac{dA}{d\Theta} \cdot \frac{d\Theta}{dt}$, але $\frac{d\Theta}{dt} = 2\pi$ у суткі, або 15^0 у гадзіну, а за-раз мы давядзем, што і $\frac{dA}{d\Theta}$ стала для данай географічнай шырыні і раўняецца $\sin\varphi$, дзе φ — гэтая шырыня.

Возьмем трыкутнік PZ3, у якім P — полюс неба, Z — — зэніт месца досьледу, 3 — усходзячая ці заходзячая зорка, A, h, Θ, δ — яе горызонтальныя і экзаторыяльныя коордынаты. Паводле формул сфэрычнай трыгономэтрыі будзе:

$$\frac{\operatorname{sn}(\pi - A)}{\operatorname{sn}\Theta} = \frac{\operatorname{sn}(\frac{1}{2}\pi - \delta)}{\operatorname{sn}(\frac{1}{2}\pi - h)},$$

альбо:

$$\frac{\operatorname{sn}A}{\operatorname{sn}\Theta} = \frac{\cos\delta}{\cos h},$$

скуль:

$$\ln\operatorname{sn}A - \ln\operatorname{sn}\Theta = \ln\operatorname{sn}\delta - \ln\cos h;$$

а адсюль:

$$\operatorname{cotg}A\,dA - \operatorname{cotg}\Theta\,d\Theta = \operatorname{tg}h\,dh - \operatorname{tg}\delta\,d\delta \qquad (2)$$

Дзеля зоркі ў горызонце $h = O$, $\operatorname{tg} h = O$; апрача гэтага дзеля сталай зоркі $d\delta = O$, значыцца, з (2) атрымаем:

$$\operatorname{cotg}A\,dA - \operatorname{cotg}\Theta\,d\Theta = O,$$

альбо:

$$\frac{dA}{\operatorname{tg}A} = \frac{d\Theta}{\operatorname{tg}\Theta};$$

альбо яшчэ:

$$\frac{dA}{d\Theta} = \frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}\Theta} \qquad (3)$$

Але для пункту ў горызонце праўдзіва *формула сонечнага гадзіньніка* (1), выведзеная вышэй дзеля пункту S':

$$\frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}\Theta} = \sin\varphi \qquad (4),$$

адкуль і вынікае формула вагальніка Foucault.

Далейшае аслабленьне

12-ай аксыёмы Вэблена

Дамброўскі Ч. Ч. (Менск)

У маім артыкуле ў № 17-18 „Прац Б.Дз.У.“ (1928 год) я даў першае аслабленьне 12-ай аксыёмы Вэблена (аб паралельных). (Там-жа глядзі тэкст усіх аксыём Вэблена). Зараз я дам довад таго, што 12-ую аксыёму Вэблена магчыма замяніць наступнай, яшчэ менш „моцнай“ (параўнай таксама Х. Мюнц, артыкул у томе 23. (1924) „Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung“—у продажы вычарпана):

„Існуюць (належаць да клясы пунктаў) гэткія 5 пунктаў A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, што: першыя 4 з іх неколінэарны і некоплянарны; A_5 некоплянарна з A_4 і адвольнымі двума з пунктаў A_1, A_2, A_3; праз A_5, праходзіць ня больш аднэй несякучай простай да кожнай з простых $A_4 A_1$, $A_4 A_2$, $A_4 A_3$ адпаведна ў роўніцах $A_5 A_4 A_1$, $A_5 A_4 A_2$, $A_5 A_4 A_3$“.

Заўвага: З прычыны таго, што гэтая аксыёма постулюе існаваньне 5 розных пунктаў, пры ёй залішнімі будуць 1, 7 і 9 аксыёмы Вэблена, і на аснове майго артыкулу ў № 17—18 „Прац Б.Дз.У.“ магчыма будзе абмежавацца 6 аксыёмамі: 3, 5, 6', 8' (Вэблена), вышэй прыведзенай аксыёмай дачыненасьці Дэдэкінда.

Довад агульнай аксыёмы аб паралельных на аснове нашай аслабленай:

Па-першае мы заўважым, што ў Боноля, у яго артыкуле ў зборніку „Questioni riguardanti le matematiche elementari“ пад рэд. Энрыквэса—ёсьць довады на аснове аксыём, роўнасільных 1—11 Вэблена, што (§ 11 часткі II):

а) Калі тры роўніцы, якія не праходзяць праз адну простую, перасякаюцца ўзаемна, і калі дзьве простыя перасеку паралельны, тады і трэцяя да іх паралельна.

б) Калі дзьве роўніцы, якія праходзяць праз дзьве паралельныя простыя, перасякаюцца, тады іх лінія перасеку паралельна да гэтых простых.

в) Дзьве простыя, паралельныя ў гэтым самым звароце да трэцяй, паралельны адна аднэй.

Тутака паралельнасьць разумеецца ў сэнсе Гаўсса, а простая і роўніца паводле Вэблена. Гэтак і мы будзем разумець гэтыя тэрміны ў наступным.

Цяпер няхай будзе (пункты A_1—A_5 тутака тыя самыя, аб якіх мова ў нашай аксыёме): $A_5 A'$ // $A_4 A_1$; $A_5 B'$ // $A_4 A_2$; $A_5 C'$ // $A_4 A_3$. Возьмем $A_4 D$ copl з $A_2 A_4 A_3$; $A_5 D'$ // $A_4 D$. Павінна быць $A_5 D'$ copl з $B' A_5 C'$, інакш лінія перасеку роўніц $C' A_5 D'$ і $A_4 A_2 A_5 B'$ не перасякала-б $A_4 A_2$, бо роўніцы $A_3 A_4 A_2$ і $C' A_5 D'$ не перасякаюцца — інакш (гл. Боноля, б)) лінія перасеку роўніц $A_3 A_4 A_2$ і $C' A_5 D'$ была-б // да $A_4 A_3$ і да $A_4 D$, г. ё. праз A_4 праходзілі-б дзьве // да гэтай лініі перасеку, а тады (гл. Боноля, а)—в)) і праз A_5 праходзілі-б дзьве // да $A_4 A_3$. Але $A_5 B'$ ёсьць адзіная // да $A_4 A_2$ праз A_5.

Калі-б былі дзьве // да $A_4 D$ праз A_5, тады іх роўніца праходзіла-б праз $A_4 D$, значыць і праз A_4. Але гэта павінна была-б быць роўніца $B' A_5 C'$, бо вышэй сказанае дапасоўваецца да кожнай $A_5 D'$, паралельнай да $A_4 D$, ці да DA_4. Значыць, было-б A_4 у роўніцы $B' A_5 C'$. Тады былі-б A_2, A_3, A_4, A_5 коплянарны, проці дапушчэньня.

Таксама кожная $A_4 D''$ у роўніцы $A_1 A_4 D$ будзе мець праз A_5 толькі адну паралельную. Гэта абніме ўсе магчымыя напрамкі. А лёгка давесьці для аднаго напрамку, што калі ў ім да нейкай простай a праз нейкі пункт A ёсьць толькі адна //(напрамак тутака разумеецца як пучок простых, паралельных у абодвых зваротах), тады і праз кожны іншы пункт B таксама толькі адна. Хопіць узяць спачатку пункт B па-за роўніцай Aa, і прыстасаваць тэорэму Боноля б) да абодвых зваротаў; а потым адвольны пункт B' у роўніцы Aa і пункт B — і прыстасаваць ізноў тэорэму б) Боноля.

Гіпэрболічныя функцыі і кубічныя раўнаньні.

Дамбро̆скі Ч. Ч. (Менск).

Для гіпэрболічных функцый chu і shu справідловы формулы:

(1) $$ch3u = 4ch^3u - 3chu,$$

прычым $1 \leq ch3u$, дый:

(2) $$sh3u = 4sh^3u + 3shu.$$

Прыпомнім яшчэ формулы трыгономэтрычных функцый:

(3) $$cs3u = 4cs^3u - 3csu,$$

прычым $cs3u \leq 1$, дый:

(4) $$sn3u = 3snu - 4sn^3u.$$

Хай будзе кубічнае раўнаньне:

(5) $$x^3 + 3px = 2q.$$

У выпадку $O < p$ падставім:

(6) $$x = rshu.$$

Тады атрымаем:

(7) $$r^3sh^3u + 3prshu = 2q.$$

Памножым абедзьве часьціны раўнаньня (7) на $\frac{4}{r^3}$:

(8) $$4sh^3u + 3 \cdot \frac{4p}{r^2} \cdot shu = \frac{8q}{r^3}.$$

Выберэм цяпер гэткае значэньне r, каб было:

$$\frac{4p}{r^2} = 1.$$

Дзеля гэтага дастаткова:

(9) $$r = 2\sqrt{p}.$$

Тады (8) зробіцца:

$$4sh^3u + 3shu = \frac{q}{p\sqrt{p}},$$

дзе абсолютная велічыня q можа быць ці больш, ці менш за абсолютную вялічыню $p\sqrt{p}$. Інакш:

$$(10) \qquad sh3u = \frac{q}{p\sqrt{p}} .$$

(На падставе формулы (2)).

Значыць, калі мы маем табліцы гіпэрболічных функцый альбо іхніх лёгарытмаў—тады дастаткова, дзеля разьвязаньня раўнаньня (5), (акрамя мнімых кораняў, якія потым магчыма атрымаць шляхам паніжэньня ступені раўнаньня на падставе тэорэмы Бэзу)—паводле формулы (10) знайсьці 3u, потым шляхам дзяленьня само u, нарэшце, x паводле формул (9) ды (6).

Прыклад: разьвязаць раўнаньне:

$$x^3 + x = 1 .$$

(параўнай № 5 „Математического Образования“ за 1930 год (Масква), мой артыкул „Еще о решении численных уравнений“).

Тутака:

$$p = \frac{1}{3} ;$$

$$q = \frac{1}{2} .$$

Мы маем:

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}} ;$$

$$\frac{q}{p\sqrt{p}} = \frac{1}{2}\sqrt{27} .$$

Значыцца, знойдзем:

$$\lg sh3u = 0{,}41465,$$

і паводле табліц лёгарытмаў гіпэрболічных функцый (прыкладам „Hilfstafeln der Hamburger Sternwarte“, старонка A 42):

$$3u = 1{,}683 ,$$

адкуль:

$$u = 0{,}561 ;$$

$$\lg shu = 9{,}77150—10.$$

Але:

$$\lg r = 0{,}06247 ,$$

значыцца:

$$\lg x = 9{,}83397 - 10 \ ,$$

адкуль:

$$x = 0{,}6823 \ .$$

Другі выпадак:

$$p < 0, \text{ але } 0 < p^3 + q^2.$$

Тады падстаўляем у раўнаньне 3-яй ступені:

$$x = \pm 2\sqrt{-p} \, . \, \mathrm{ch}u, \ (+, \text{ калі } q > 0, -, \text{ калі } q < 0),$$

бо тады абсолютная вялічыня q больш за $-p\sqrt{-p}$.

Прыклад:

Разьвязаць раўнаньне:

$$x^3 - 3x = 20.$$

Падстаўляем $x = 2\mathrm{ch}u$ і атрымоўваем:

$$8\mathrm{ch}^3u - 6\mathrm{ch}u = 20 \ ,$$

альбо:

$$\mathrm{ch}3u = 10 \ ,$$
$$\lg\mathrm{ch}3u = 1 \ ;$$
$$3u = 2{,}9932 \ ;$$
$$u = 0{,}9977(3) \ ;$$
$$\lg\mathrm{ch}u = 0{,}18764 \ ;$$
$$\lg 2 = 0{,}30103 \ ;$$
$$\lg x = 0{,}48867 \ ;$$
$$x = 3{,}081 \ .$$

Трэці выпадак:

$$p^3 + q^2 \leqq 0 \ .$$

Тады падстаўляем у (5):

$$x = 2\sqrt{-p}\,\mathrm{cs}u$$

альбо:

$$x = 2\sqrt{-p}\,\mathrm{sn}u \ ,$$

бо тады абсолютная велічыня $q \leqq -p\sqrt{-p}$.

Астатняе ідзе таксама, але $3u$ можа мець 3 значэньні, якія даюць розныя значэньні x.

Мы бачым, што клясычны „casus irreducibilis“ тутака непадзельны, а другі выпадак распадаецца на два, ня прыводзіцца да аднаго, і гэткім чынам болей, чымся той, заслугоўвае назвы „irreducibilis“.

(Прачытана на пасяджэньні Менскае Сэкцыі Ўсебеларускай Матэматычна-Фізычнай Асоцыяцыі 10-га сакавіка 1931 году).

Да тэорыі эфэкту Людзьвіга—Сорэ.

Яў. Яр. Сіроцін.

1. Зьява, якая вядома ў фізычнай літаратуры пад назвай „эфэкту Людзьвіга—Сорэ“ (Ludwig—Soret effect), была знойдзена Людзьвігам яшчэ ў 1856 г. [1]) і незалежна зноў выкрыта Сорэ ў 1879 г. [2]).

Часта гэта завецца яшчэ „тэрмодыфузыяй“.

Гэта зьява складаецца з таго, што, калі ў растворы ўсюды аднолькавай концэнтрацыі ўтварыць градыент тэмпэратуры, дык зараз пачне парушацца аднастайнасьць концэнтрацыі; гэтая зьмена будзе цягнуцца да таго часу, пакуль не наступіць стан роўнавагі і не ўстановіцца сталы расклад градыенту концэнтрацыі.

2. Зьява Людзьвіга—Сорэ вывучалася шмат разоў, як з экспэрымантальнага боку, гэтак і з тэорэтычнага.

Напр., на падставе апошніх досьледаў Сорэ [3]) Фан’т Гофф даў тлумачэньне зьяве з пункту погляду аналёгіі паміж станам растварэньня і газавым станам [4]), адхіленьні-ж у першых досьледах Сорэ [5]) ад законаў Фан’т Гоффа былі аднесены наконт дзейнічаньня сілы цяжару.

Сам Сорэ інтэрпрэтаваў вынікі сваіх доследаў з пункту погляду клясычнага раўнаньня дыфузіі Фіка [6]).

У досьледах Арэніуса [7]) тэорыя Фан’т Гоффа наогул пацьвердзілася, у тэй час, калі вынікі Вэрэйдэ [8]) выяўляюць значныя адхіленьні ад яе. Скарыстоўваючы ўплыў броунаў-

---

1) Ludwig, Wien. Akad. Ber. 20, p. 539 (1856).
2) Soret, Arch. d. sciences phys. et natur. (3), 2, p. 48 (1879).
3) Soret, Ann. Chim. et Phys. (5), 23, p. 239 (1881).
4) Van't Hoff, Ztschr. f. phys. Chemie, 1, p. 481 (1887).
5) Soret, Arch. d. sciences. phys. et natur. 4, p. 209 (1880), таксама [2]).
6) Гл. [2]).
7) Arrhenius. Zts. f. phys. Chemie, 26, p. 187 (1898).
8) Wereide, Ann. Phys. (9), 2, p. 55.

скага руху, Вэрэйдэ [9]) знаходзіць добрае пацьверджаньне сваёй тэорыі досьледам.

Для сумясяў раствораў Баўкрофт [10]) знайшоў, што концэнтрацыя магчыма ў той ці іншы бок у залежнасьці ад велічыні гэтых концэнтрацый, і існуюць сумесі, для якіх няма ніякай дыфузіі.

Для нагляданьняў тэрмодыфузі і розныя аўтары скарысталі ўласныя мэтоды для знаходжаньня концэнтрацыі: першыя аўтары карысталіся звычайнымі мэтодамі вагавога альбо аб'ёмнага аналізу; Вінер [11]), Товэр [12]) [13]), Гэймбродт [14]), Клэк [15]), Тэннэр [16]) распрацавалі оптычны мэтод на падставе розная пераламлівасьці пучка праменьняў у залежнасьці ад концэнтрацыі раствору. Тэорыя гэтага мэтоду дана асабліва працамі Больцмана [17]) і Товэра. Чыпмэн [18]) карыстаўся для нагляданьняў концэнтрацыі мэтодам мераньня электраправоднасьці.

У той час, калі звычайна для атрыманьня канчатковай роўнавагі патрэбны доўгі тэрмін працягласьцю некалькі месяцаў альбо дзесяткаў дзён, Тэнэр сконструяваў прыладу, у якой стацыянарны стан атрымліваецца праз некалькі гадзін, у крайнім выпадку, праз суткі.

3. У даным артыкуле разглядаецца найбольш просты выпадак устанавіўшайся роўнавагі з пункту погляду раўнаньня Фіка, іменна, калі тэмпэратура ўздоўж цыліндрычнага (ці прызматычнага) слупа раствору павялічваецца лінейна. Тутака даецца агульнае раўнаньне зьявы Людзьвіга—Сорэ, але разглядаецца яго інтэграл толькі для часу $t = \infty$.

Няхай маем цыліндрычны альбо прызматычны слуп рашчыны, якая спачатку мае ўсюды аднолькавую концэнтрацыю c_0.

Зробім па даўжыні яго градыент тэмпэратуры. Няхай цеплавы стан раствору ўстановіцца так хутка, што за гэты час яшчэ не адбудзецца ніякай зьмены концэнтрацыі, якую магчыма было-б адзначыць.

---

[9]] Wereide, Ibid. p. 67.

[10]) Baukroft, Festchrift Ludw. Boltzmann, Leip. 1904, p. 553.

[11]) Wiener, Wied. Ann. 49, p. 105 (1893).

[12]) Thovert, рад артыкулаў у Com. rend. за 1901—1904 гг., таксама Ann. chim. et phys. (7), 26, p. 366 (1902).

[13]) Thovert, Ann. chim. et phys. (9), 2, p. 369 (1914).

[14]) Heimbrodt, Drud. Ann. (4) 13, p. 1028 (1904).

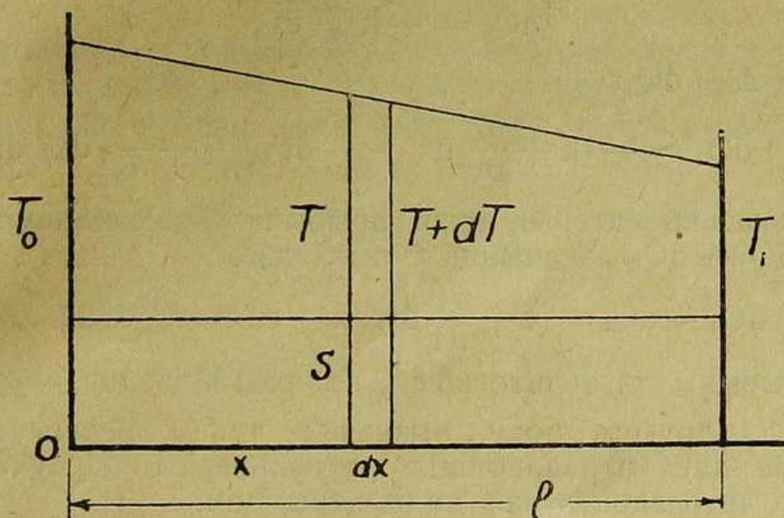
[15]) Clack, Proc. Phys. Soc. 36, p. 313 (1924).

[16]) Tanner, Transac. of the Farad. Soc. 23, 2, p. 75 (1927).

[17]) Boltzmann, Wied. Ann. 53, p. 959 (1894).

[18]) Chipman, Jour. Amer. Chem. Soc. 48, p. 2577 (1926).

Хай тэмпэратура па даўжыні цыліндра зьмяняецца лінейна. На малюнку адзначан гэты ход тэмпэратуры.



Левай сьценцы адпавядае тэмпэратура T_0, правай—T_1. прычым $T_0 > T_1$.

Хай сячэньне цыліндра будзе роўна 1.

Возьмем у разглядаемым асяродку два бяскрайна блізкія (адлегласьць dx) пласты, кожны з якіх у сваю чаргу зьяўляецца бяскрайна тонкім. Левы пласт, які знаходзіцца на адлегласьці x ад пачатку, будзе мець тэмпэратуру T, а ў пласьце на адлегласьці $x + dx$ хай яна будзе $= T + dT$ (dT у даным выпадку адмоўна).

Працэс зьмены концэнтрацыі с магчыма ўявіць сабе, як вынік дыфузіі, якая працякае паміж суседнімі пластамі, прычым коэфіцыент дыфузіі k у кожнага сячэньня зьмяняецца як у залежнасьці ад тэмпэратуры T (альбо адлегласьці x), так і ў залежнасьці ад часу t (альбо концэнтрацыі c).

Калі пласт рошчыні з коордынатай x будзе характарызавацца наступнымі вялічынямі: коэфіцыэнтам дыфузіі k, концэнтрацыяй у левай сьценцы—c, градыентам концэнтрацыі — $\frac{\partial c}{\partial x}$, тэмпэратурай — T, дык адпаведныя значэньні ў пласьце з коордынатай $x + dx$ будуць:

$$k + \frac{\partial k}{\partial x} dx + \frac{\partial k}{\partial c} dc\,,\quad c + \frac{\partial c}{\partial x} dx\,,\quad \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} dx \ \text{i}\ T + dT.$$

Колькасьць матэрыі dQ_0, якая продыфундыравала за элемэнт часу dt праз першы пласт, будзе, паводле раўнаньня Фіка,

$$(1) \qquad dQ_0 = -k\frac{\partial c}{\partial x}dt\,,$$

праз другі — dQ_1:

$$(2) \qquad dQ_1 = -\left(k + \frac{\partial k}{\partial x}dx + \frac{\partial k}{\partial c}dc\right)\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}dx\right)dt$$

Колькасьць матэрыі, якая прыбыла ў аб'ёме паміж пластамі: $dQ_1 - dQ_0$ азначыцца ў выглядзе:

$$(3) \qquad dQ_1 - dQ_0 = \left(c + \frac{\partial c}{\partial t}dt\right)dx - c\,dx = \frac{\partial c}{\partial t}dt\,dx\,,$$

з прычыны таго, што аб'ём, які разглядаецца, $= dx$.

Калі, з другога боку, вызначым тую-ж велічыню пры дапамозе двух перадапошніх раўнаньняў і параўнаем яе з толькі што знойдзенай, тады атрымаем:

$$(4) \qquad \frac{\partial c}{\partial t}dx = -\left(2\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial x}dx + \frac{\partial k}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial x}dt + k\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}dx\right).$$

Пры дыфэрэнцыраваньні k па c меркавалася, што c ёсьць функцыя x і t, а бяскрайна малыя множнікі 2-га парадку апускаліся.

Гэты выгляд мае агульнае раўнаньне тэрмодыфузіі.

4. Для роўнавагі, якая ўстанавілася, пры $t = \infty$ зьмены концэнтрацыі ня маюць месца:

$$(5) \qquad \frac{\partial c}{\partial t} = 0$$

Агульнае раўнаньне ператвараецца ў наступнае:

$$(6) \qquad k\frac{d^2c}{dx^2} = -2\frac{dk}{dx}\cdot\frac{dc}{dx}$$

Увядзем замест адлегласьці x тэмпэратуру T:

$$(7) \qquad T = T_0 + \alpha\,x,$$

дзе

$$\alpha = \frac{T_1 - T_0}{l},$$

калі l — даўжыня ўсяго слупу рошчыні.

Тады

$$(8) \qquad \frac{dk}{dx} = \alpha\frac{dk}{dT}\,;\quad \frac{dc}{dx} = \alpha\frac{dc}{dT}\,;\quad \frac{d^2c}{dx^2} = \alpha^2\frac{d^2c}{dT^2}$$

і раўнаньне будзе мець наступны выгляд:

(9) $$k \frac{d^2c}{dT^2} = -2 \frac{dk}{dT} \cdot \frac{dc}{dT}.$$

5. Разгледзім зараз спэцыяльны выпадак: няхай у рошчыні для малога прамежку тэмпэратур коэфіцыент дыфузіі зьмяняецца ў залежнасьці ад тэмпэратуры згодна закону:

(10) $$k = k_0(1 + \beta T),$$

што адпавядае сапраўднасьці ў шэрагу выпадкаў, якія разглядалі розныя аўтары [19]).

Тады маем:

(11) $$(1 + \beta T) \frac{d^2c}{dT^2} = -2\beta \frac{dc}{dT}$$

Агульны інтэграл гэтага раўнаньня будзе мець выгляд:

(12) $$c = \frac{A}{1 + \beta T} + B$$

альбо

(12') $$c = \frac{A}{1 + \beta T_0 + \alpha\beta x} + B,$$

дзе A і B—адвольныя сталыя.

6. Адну з неазначаных сталых магчыма азначыць, калі выразіць, што колькасьць растворанай матэрыі за час дыфузіі не зьмяняецца, г. зн.

(13) $$\int_0^l c dx = c_0 l$$

дзе c_0 азначае пачатковую концэнтрацыю.

Тады

(14) $$c_0 l = \frac{A}{b} \lg \frac{a + bl}{a} + Bl,$$

дзе для кароткасьці азначана:

(15) $$1 + \beta T_0 = a, \ \alpha\beta = b.$$

Разам з гэтым напішам агульны інтэграл у выглядзе:

(16) $$cl = \frac{Al}{a + bx} + Bl.$$

---

[19]) Напр., De-Heen., Bull. Acad. Belg. 8, p. 219 (1884), альбо 19, p, 197 (1890).

Калі аднімем ад перадапошняга, атрымаем:

$$(17)\qquad (c_0 - c)\,l = A\left\{\frac{1}{b}\lg\frac{a+bl}{a} - \frac{l}{a+bx}\right\}$$

Апошнюю сталую магчыма азначыць, калі ўвесьці концэнтрацыю c_1 у нагрэтага канца. Тады маем:

$$(18)\qquad \frac{c_0 - c}{c_0 - c_1} = \frac{\frac{1}{b}\lg\frac{a+bl}{a} - \frac{l}{a+bx}}{\frac{1}{b}\lg\frac{a+bl}{a} - \frac{l}{a}}$$

Адсюль для концэнтрацыі c_2 у больш халоднага канца атрымліваем:

$$(19)\qquad \frac{c_0 - c_2}{c_0 - c_1} = \frac{\frac{1}{b}\lg\frac{a+bl}{a} - \frac{l}{a+bl}}{\frac{1}{b}\lg\frac{a+bl}{a} - \frac{l}{a}}$$

7. Цікавым зьяўляецца месца знаходжэньня пласту, у якім концэнтрацыя ў час роўнавагі будзе роўна пачатковай велічыні c_0.

На падставе апошняга раўнаньня атрымліваем для $c = c_0$

$$(20)\qquad \frac{1}{b}\lg\frac{a+bl}{a} = \frac{l}{a+bx},$$

калі x ёсьць адлегласьць шуканага слою ад пачатку коордынат.

Адгэтуль

$$(21)\qquad x = \frac{l}{\lg\frac{1+\beta T_1+\alpha\beta l}{1+\beta T_1}} - \frac{1+\beta T_0}{\alpha\beta}$$

альбо, калі падставіць сюды значэньне α:

$$(22)\qquad \alpha = \frac{T_1 - T_0}{l},$$

атрымаем канчаткова:

$$x = l \left\{ \frac{1}{\lg \frac{1+\beta T_2}{1+\beta T_1}} + \frac{1+\beta T_1}{\beta (T_1 - T_2)} \right\}. \tag{23}$$

Адсюль бачым, што x не залежыць ад пачатковай концэнтрацыі і зьяўляецца функцыяй толькі ўмоў тэмпэратуры і тэмпэратурнага коэфіцыенту дыфузіі.

Менск,
Фізычны Інстытут
Б. Дз. У.

КРЫТЫКА

прац У. Н. Іваноўскага „Из лекций по методологии наук“ [1]).

Проблема чыстай „і прыкладной“ матэматыкі ў Іваноўскага.

Ц. Бурстын у Менску.

Працы Іваноўскага [1]) прысьвечаны проблемам мэтодолёгіі матэматыкі. Яны цесна зьвязаны з яго агульнымі філёзофічнымі поглядамі, якія ў значнай частцы вылажаны ў кніжцы „Методологическое введение в науку и философию“, том первый [2]).

Мы дзеля гэтага будзем прымушаны часта ў нашых крытычных заўвагах спасылацца на гэтую кніжку.

Галоўная проблема прац „аб мэтодолёгіі матэматыкі“ Іваноўскага ёсьць проблема „чыстай“ і „прыкладной матэматыкі“. Мы будзем займацца крытычным разглядам гэтай проблемы і думаем, што мы трапім у ядро поглядаў аўтара і пакажам неправідловасьць яго мэтодолёгічных поглядаў.

Да проблемы „чыстай“ матэматыкі аўтар падыходзіць на шляху гістарычнага разгляданьня матэматыкі, малюючы ў кароткіх рысах гісторыю матэматыкі, альбо, лепш сказаць, матэматычнага мысьленьня.

Трэба тут падкрэсьліць, што гэты гістарычны нарыс ня мае нічога супольнага з матэрыялістычным разуменьнем

---

[1]) „Працы Б. Д. У., у Менску № 8-9-10 і 17-18; Вл. Н. Ивановский; Из лекций по методологии наук“. Главы I, II. Мы будзем коратка цытаваць гэтыя працы: Працы I, і адпаведна: Працы II.

Гэтая мая праца будзе яшчэ друкавацца ў больш шырокім выглядзе ў працах Б. А. Н., як адна з прац з цыклю: „Аб чыстай і прыкладной матэматыцы“. Акрамя поглядаў Іваноўскага, яна будзе закранаць і погляды іншых аўтараў.

[2]) Выдадзена ў Менску ў 1923 годзе. Мы будзем гэтую кніжку коратка цытаваць: Мет. введ. I.

гісторыі матэматыкі. Ён зьяўляецца, як мы ўбачым пазьней, адбіткам тых філёзофічных поглядаў, якія абараняе Іваноўскі.

Аўтар адрозьнівае ў разьвіцьці матэматыкі 5 галоўных пэрыодаў. І пэрыод: эпоха „первобытного магического мышления". ІІ пэрыяд: эпоха „практико-эмпирическая". ІІІ пэрыод: „систематическая". IV пэрыод: эпоха „математики на службе у естествознания"; і нарэшце V пэрыод: эпоха „чыстай матэматыкі" і „рэальнай" матэматыкі.

Я тут не хачу ўнікаць глыбей у абгрунтаваньне гэтага цалкам схэматычнага падзелу гісторыі матэматыкі. Нас тут цікавіць найбольш пераход IV-га пэрыоду ў V-ты.

IV пэрыод, як мы бачылі, характарызуецца аўтарам, як эпоха матэматыкі на службе прыродазнаўчых навук. Гэта час XVI, XVII, XVIII сталецьцяў. Гэтая вялізарная эпоха матэматыкі добра вядома, так што нам непатрэбна затрымоўвацца на яе глыбейшым дасьледваньні. Для нас надта важна яшчэ раз падкрэсьліць глыбокую сувязь паміж матэматыкай і прыродазнаўчымі навукамі гэтай эпохі, супрацоўніцтва іх, якое мела вялізарнейшае значэньне для абедзьвюх гэтых галін навукі.

Об'ектыўнае, рэальнае значэньне матэматыкі лічылася ў той час само сабою зразумелым, нават часта гэта значэньне бывала пераўвялічана. Адно ва ўсялякім выпадку правідлова,—што матэматыка адбівае пэўныя об'ектыўныя матэрыяльныя сувязі і законамернасьці паміж рэчамі і што гэтага об'ектыўнага зьместу нават найбольш адцягнены формалізм і ідэалізм ня можа зацямніць [1]).

Матэматыка зьяўляецца па сутнасьці навукай аб колькасьці, аб колькасных законамернасьцях, якія выражаюць форму колькасных матэрыяльных процэсаў. На сваёй ніжэйшай ступені яна зьяўляецца навукай аб „знадворных", безразьлічных суадносінах матэрыяльнага сусьвету (арытмэтыка). Але з прычыны таго, што ў рэчаіснасьці няма ніякіх абсолютна ізоляваных, знадворных суадносін, і ўсякая, хаця-б самая бедная зьместам знадворная суадносіна зьвязана ўзаемнай залежнасьцю з іншымі знадворнымі і ўнутранымі суадносінамі, дык усе матэматычныя паняцьці, абстракцыі на

[1]) Матэматык Thoma (Jena) прыстасаваў да людзей, якія цалкам выключна займаюцца толькі адцягнена-лёгічнымі, формальнымі досьледамі над рэчамі (сымболямі), якія нічога не азначаюць, і выказаньнямі, якія нічога ня выказваюць, слова „мысьленьне бяз думкі" (gedankenloses Denken). Сэнс гэтага выказаньня мы лепш зразумеем толькі пазьней у сувязі з парадоксамі Russell'я і ўсёй філёзофіяй матэматыкі Іваноўскага.

сваёй вышэйшай ступені разьвіцьця зьяўляюцца ня толькі адбіткамі безразьлічных знадворных суадносін, але таксама суадносін, якія характарызуюць якасную колькасьць, меру. Гэта разьвіцьцё (увядзеньне зьменных вялічынь, граніцы....) дазваляе таксама і якасныя ўласьцівасьці апрацоўваць колькасна, робіць магчымым больш глыбокае ўнікненьне матэматычнага апарату ў зьмест суадносін прыроды, унікненьне, якое не зьяўляецца шаблёнам, знадворным этыкетам, але зьяўляецца об'ектыўным пазнаньнем зьявішчаў прыроды. Гэта разьвіцьцё зьяўляецца асымптотычна прогрэсыўным, усё больш і больш адэкватным об'ектыўнай сапраўднасьці. Гэта разьвіцьцё гістарычна абумоўлена тэхнічнымі, экономічнымі, соцыяльнымі, навуковымі ўмовамі. Матэрыяльныя карэньні гэтага разьвіцьця і яго сутнасьць ня можа змывацца якімі-б там ні было моцнымі схіленьнямі матэматыкаў да ідэалізму (формалізму, рэляцыонізму...) [1]).

Праўда, гэта правільна, што матэматыка канца 19-га і пачатку 20-га стагодзьдзя ўступіла на больш адцягнены, формальны шлях. Але гэта разьвіцьцё мае свае глыбокія гістарычна-экономічныя прычыны, якія зьвязаны з крызісам капіталізму. Калі разглядаць па сутнасьці, нават і гэтая матэматыка не падцьвярджае ідэалізму, яна *мае таксама свае карэньні ў матэрыяльным сусьвеце*, хаця яна і разглядаецца шмат якімі матэматыкамі, як свабодная навука, як гэткая гістарычна, прычынна неабумоўленая, „свабодная" навука, якая свае об'екты, паняцьці стварае зусім „свабодна".

Адным з корняў гэтай ілюзіі матэматыкаў зьяўляецца таксама надта моцна ўкаранёнае абсолютнае, па-за часам і прасторай, разгляданьне матэматыкі. Мы пазьней яшчэ неаднакроць вернемся да гэтых проблем, а зараз зьвернемся да крытыкі філёзофічных поглядаў Іваноўскага.

Ахарактарызаваўшы IV эпоху матэматыкі, аўтар пераходзіць да разгляданьня V-тага пэрыоду матэматыкі.

Прыглядзімся-ж, як аўтар разумее V-ты пэрыод матэматыкі.

На старонцы 15-ай „Прац II" мы чытаем:

„Начиная с конца XVIII в., то понимание математики, на почве которого стоял Кант, постепенно оказывается несостоятельным. Нарастает пятый (и пока последний, захваты-

---

[1]) Ня трэба даваць сябе ашукаць суб'ектыўным ходам разьвіцьця матэматыкі, як ён адбіваецца ў галавах матэматыкаў, філёзофічнымі поглядамі і растлумачэньнямі пераважнай колькасьці матэматыкаў.

вающий и современность) период в развитии математики и ее методологии“.

І потым аўтар прыходзіць пасьля разгляду далейшага гістарычнага разьвіцьця матэматыкі (неэўклідава геомэтрыя, вышэйшыя комплексныя сыстэмы лікаў, вэктарна-тэнзарнае лічэньне, тэорыя мностваў, Эйнштэйнаўская тэорыя адноснасьці...) да наступнага вываду („Працы II“, старонка 17):

„Возникновение „воображаемых“ математических наук сделало неизбежным распадение математики на две *принципиально* одна от другой отличные области: 1) на „чистую“, отвлеченно мыслимую или собственно „построительную“ математику, и 2) математику реальную“.

„А так как в основе каждой из этих областей математики лежат специфические для нее методы, то и методология математики получает теперь две различных формы: одну—в области чистой математики, и другую—в области математики „реальной“. Теперь об‘ектом „чистой“ математики становится уже не то, что „существует реально“, т. е. в фактическом смысле, а то, что существует в качестве правомерного логического построения, т. е. то, 1) что может (в известной области) мыслиться без внутренних противоречий, 2) что строго логически выводится из предпосылок, хотя-бы последние строились до известной степени произвольно. „Чистая“ математика обнимает теперь отвлеченно возможное, логически мыслимое, строго связное и вытекающее из предпосылок; она становится наукой об *умственных построениях*“.

І потым далей, дапаўняючы погляды Russell'я (старонка 18):

„Таким образом, определение Рёсселя должно было-бы получить приблизительно следующий вид: *чистая математика есть наука логических выводов одних положений из других в сфере форм хорошо упорядоченных многообразий*“.

Гэтыя погляды Іваноўскага паказваюць яскрава *ідэалістычны характар яго мэтодолёгіі матэматыкі; яго прынцыповы разрыў* абедзьвюх галін матэматыкі, „чыстай“ і „рэальнай“, зьяўляецца, як мы пазьней убачым, вынікам *яго прынцыповага адрыву тэорыі ад практыкі.* Сапраўдны твар мэтодолёгіі Іваноўскага, яго ідэалізм і эклектызм, выявіцца тады яскрава.

Цяпер пакуль мы зьвернемся да больш спэцыяльных мэтодолёгічных матэматычных проблем.

Да абедзьвюх падкрэсьліваемых Рассэлем характэрных рысаў матэматыкі, г. зн. да формальнага ізоморфізму, рэляцыонізму, і да гіпотэтычнага характару матэматычных выказаньняў, якія па сутнасьці толькі адбіваюць розныя формы ідэалізму Russell'я, хаця яны дзе-ні-дзе ў Russell'я і атрымліваюць рэалістычны дадатковы смак, Івануоскі ўвесь час вяртаецца і ўгледжвае ў іх найбольш важнае падмацаваньне для сваіх матэматычных і філёзофічных дасьледаў.

Ізоморфізм, які па сутнасьці зьяўляецца завостраным прынцыпам аналёгіі, мае для дасьледваньня вялізнае значэньне і вядомы ў гісторыі матэматыкі часта як эўрыстычны прынцып. Ізоморфія дазваляе часта значныя галіны ўласьцівасьцяў, тэорэм і г. д. пераносіць з аднаго абсягу ў іншы непасрэдна альбо пасрэдна (прынцып дуальнасьці ў проектыўнай геомэтрыі, прынцып пераносу Study ў геомэтрыі лініяў, тэорыя груп...).

Іваноўскі занадта падкрэслівае сьцьвярджэньне Рассэля, быццам матэматыка мае толькі гіпотэтычны характар,—што матэматычныя тэорэмы толькі тады праўдзівы, калі праўдзівы аксыёмы, якія разглядаюцца шмат якімі навейшымі матэматыкамі як правілы, пасылкі, дэфініцыі. Што выніковае выказаньне тады справідлова, калі справідлова пасылка гэтага выказаньня, гэта трывіяльная заўвага. Але зусім ня ў гэтым справа ў нашай проблеме. Справа ідзе аб тым, што штат якія матэматычныя выказаньні і тэорэмы маюць цалкам рэчаіснае значэньне, об'ектыўнае значэньне, і што аксыёмы і „дэдукцыі“ маюць заданьне давесьці гэты об'ектыўны стан рэчаў матэматычна. Возьмем прыкладам тэорэму Эйлера аб выпуклых многасьценьніках:

$$(1) \quad E+F=K+2,$$

прычым E ёсьць лік вяршынь, F — лік сьцен, а K — лік кантаў, тады сувязь (1) выказвае об'ектыўны стан рэчаў. Гэткіх прыкладаў магчыма было-б даць безьліч і ня толькі з дыскрэтнай, але і з непарарыўнай матэматыкі. Гэта ёсьць найбольш істотная проблема матэматыкі, падкрэсьліць гэта, пазнаць і зразумець об'ектыўнае рэчаіснае значэньне і прыстасавальнасьць матэматыкі ў прыродазнаўстве—зьяўляецца галоўнай проблемай філёзофіі матэматыкі. Замест гэтага Іваноўскі выводзіць чыста лёгічны, формальны вывад з Рассэлеўскай парадоксальнай характарыстыкі сутнасьці матэматыкі, які датычыць формальнага боку матэматычных дэдукцый: „з A вынікае B, значыць, калі A праўдзіва, тады

і В праўдзіва". Бязумоўна, гэта зьяўляецца аднэй з важнейшых проблем—давесьці формальную несупярэчнасьць усяе сыстэмы аксыём, пасылак сыстэмы, як кажа аксыёматыка,— бо інакш можа разваліцца ўся будоўля лёгічных і матэматычных дэдукцыяў, але, бязумоўна, разам з гэтым гэта не адзіная і ня самая важная проблема.

Гэтая асноўная проблема формалістычнай філёзофіі матэматыкі, якая прадпрымае спробу зьвесьці ўсю матэматыку да формальнай лёгікі, не знайшла разьвязку. Наадварот, усе гэтыя спробы паказваюць, што яны знаходзяцца на зусім няправільным шляху, які ня мае ніякага выхаду.

Мы ня будзем тут займацца гэтай важнай проблемай філёзофіі матэматыкі, проблемай аксыёматыкі, як яе разумеюць формалісты і інтуіцыоністы [1]). Разьвязак гэтай проблемы паводле маёй думкі немагчымы ў гэткай форме, у якой да яго імкнуцца формалісты (а таксама і інтуіцыоністы). Усякая спроба зьвесьці без астачы матэматыку, асновы матэматыкі да формальнай лёгікі, павінна правалiцца, бо яна, калі ўзяць у асноўным, хоча прывесьці бесканечнасьць матэматыкі, ці гэта будзе паняцьце цэлага ліку, ці паняцьце контынууму, зьменнай... да лёгікі скончанасьці, прывесьці дыялектычны [2]), зьместавы характар матэматыкі, об'ектыўны рэальны сэнс яе аксыём да чыста формальнай схемы [3]).

Да *сьвядомасьці* гэтага дайшлі таксама і некаторыя найбольш вядомыя аксыёматыкі. Так, напрыклад, Hilbert кажа, што „матэматыка мае ў сваім распараджэньні пэўны зьмест (gesicherten Inhalt)", незалежны ад усякай лёгікі і таму „ніколі ня можа быць абгрунтавана толькі лёгікай" (формальнай—аўтар) [3]). Але Hilbert шукае разьвязку проблемы аксыёматыкі на шляху да некаторай мэта-матэматыкі, якая па сутнасьці прыводзіць да некаторай разнавіднасьці інтуіцыоністычнага ідэалізму, і ня шукае яго на аснове больш глыбокага об'ектыўнага дасьледваньня рэальных матэрыяльных карэньняў матэматыкі.

Да вырашэньня гэтай важнай проблемы можна прысьці толькі пасьля таго, калі мы зразумеем об'ектыўны, рэальны дыялектычны [2]) сэнс аксыём, матэматычных конструкцый і г. д. у іх гісторыка-экономічным разьвіцьці і, апрача гэ-

[1]) Яноўская: „Закон единства противоположностей в математике". Естествознание и марксизм, 1929. (I).
[2]) Гл.: Ф. Энгельс: Диалектика прыроды. Архив К. Маркса и Ф. Энгельса; Книга Вторая, 1925. Стр. 13, 53, 83, 205, 207.
[3]) D. Hilbert: Ueber des Unendliche. „Math. Annalen" (95), 1925.

тага, на аснове дасьледваньня рэальных і матэрыяльных карэньняў аксыём зразумеем сутнасьць матэматыкі, яе прыстасаваньня і г. д.

Гэтая проблема залежыць таксама цалкам ад проблемы рэальнасьці, об'ектыўнасьці і прыстасавальнасьці матэматыкі, і толькі разьвязак гэтых асноўных проблемаў дае магчымасьць разьвязаць проблему формальнай несупярэчнасьці матэматыкі.

Дзеля гэтага мы тут будзем падкрэсьліваць якраз гэтую проблему об'ектыўнасьці, магчымасьці прыстасаваньня матэматыкі ў прыродазнаўчых навуках, у тэхніцы...

Гэтыя найважнейшыя проблемы матэматыкі выпалі з-пад увагі Івапоўскага і яму важна разглядзець парадоксальнае выказаньне Рассэля аб сутнасьці матэматыкі, як падмацаваньне яго падзелу матэматыкі на „чыстую“ і „рэальную“. Пазьней мы папрабуем выцягнуць на дзённае сьвятло філёзофічныя карэньні гэтага падзелу.

Мы тут толькі цалкам коратка займаліся гіпотэтычным характарам матэматыкі, як яго разумее Іваноўскі. Да проблем рэляцыянізму і ізоморфізму мы вернемся пазьней у далейшым працягу гэтае працы.

Цалкам ясна, што аўтар зусім ня можа і ня хоча зразумець об'ектыўнага разьвіцьця матэматыкі XIX і XX сталецьцяў і ў выніку гэтага ён даходзіць да гэтага прынцыповага падзелу матэматыкі на „чыстую“ і „прыстасаваную“, які цалкам вуаліруе характар і сутнасьць матэматыкі.

Узьнікненьне неэўклідавае геомэтрыі было рэволюцыйнай стадыяй у разьвіцьці матэматыкі, яно пахіснула трансцэндэнтны ідэалізм філёзофіі Канта, яно разбурыла веру ў абсолютнае значэньне эўклідавай геомэтрыі [1]). Яно працярэбіла шлях да больш глыбокага і на многа больш рэальнага пазнаньня об'ектыўных сувязяў і законамернасьцяў, яно павяло да больш глыбокага разуменьня сутнасьці эўклідавай геомэтрыі, да разуменьня яе об'ектыўнага (і адноснага) сэнсу, яно выпрацавала мэтоды, якія вялі да далейшага разьвіцьця мэтрычнае прасторы, Ріманаўскае прасторы. І гэта, на першы погляд можа зусім „адцягненае“, „нерэальнае“ разьвіцьцё, як яго бачыць аўтар,—таму што ён якраз разглядае разьвіцьцё матэматыкі не гістарычна, ня ў сувязі з усім разьвіцьцём навукі, тэхнікі, таму што ён думае мэтафізычна, а не дыялектычна,—яно зьяўляецца якраз разь-

---

[1]) Я тут маю на ўвазе неэўклідавую гэомэтрыю ў яе разгорнутым выглядзе.

віцьцём матэматычных паняцьцяў да больш высокай конкрэтнасьці, якая пазьней зьдзейсьнілася ў тэорыі адноснасьці.

Гэта разьвіцьцё якраз паказала шлях больш глыбокаму пазнаньню проблемы прасторы, яе мэтрычнай пабудовы, і адкрыла нам сутнасьць эўклідавай геомэтрыі, як спэцыяльнага выпадку Ріманнавай геомэтрыі. (Эўклідава геомэтрыя зьяўляецца геомэтрыяй статычнага поля для малых скорасьцяў).

Проблема геомэтрыі была прыведзена ў сувязь з проблемай мераньня, як фізычнага процэсу. Мераньне разумеецца ў яго залежнасьці ад мэтрычнай пабудовы прасторы, якая, аднак, не разглядаецца, як нешта абсолютнае, чужое сусьвету, але як яму іманэнтнае, залежнае ад яго разьмеркаваньня масы.

Мераньне было прызнана, як адна з галоўных проблем для разьвязку проблемы прасторы, гэтай об'ектыўна-рэальнай формы існаваньня матэрыі. Пункт погляду дыялектычнага матэрыялізму на проблему прасторы яскрава падкрэсьлены Леніным [1]): „Прастора і час не зьяўляюцца ніякімі простымі формамі зьявішч, але об'ектыўна рэальнымі формамі існаваньня. У сусьвеце ня існуе нічога акрамя рухаючайся матэрыі, і рухаючаяся матэрыя ня можа інакш рухацца, чымся ў прасторы і часе. Чалавечыя прадстаўленьні аб прасторы і часе адносны, але з гэтых адносных уяўленьняў складаецца абсолютная ісьціна, гэтыя адносныя ўяўленьні рухаюцца ў сваім разьвіцьці ў напрамку абсолютнай ісьціны, прыбліжаюцца да яе. Зьменнасьць чалавечых уяўленьняў аб прасторы і часе таксама не супярэчыць об'ектыўнай рэальнасьці іх, як зьменнасьць навуковых ведаў аб пабудове і формах руху матэрыі не супярэчыць об'ектыўнай рэальнасьці знадворнага сусьвету".

Дзеля гэтага зьяўляецца грунтоўна памылковым пэўную гістарычна абумоўленую форму пазнаньня прасторы, эўклідавасьць, узьнімаць да абсолютнага пазнаньня, і ігнараваць гістарычнае разьвіцьцё проблемы прасторы, яе пазнаньне, якое паступова ўсё больш і больш набліжалася да об'ектыўнай сапраўднасьці. Мы бачым апрача гэтага ў гэтым матэматычным разьвіцьці больш, чымся бачыць Іваноўскі, які яго не разумее. Мы бачым тут надта дакладна, як матэматычная і фізычная проблемы прасторы глыбока зьвязаны адна з аднэй, як яны разьвіваюцца да нейкага больш выco-

[1]) „Матэрыялізм і эмпірыякрытыцызм", разьдзел III, § 5.

кага дыялектычнага сынтэзу. Увесь гэты процэс разьвіцьця матэматыкі зьяўляецца, калі яго разглядаць па сутнасьці, гістарычна абумоўленым процэсам, які вядзе да конкрэтызацыі матэматыкі.

Усё гэта разьвіцьцё ня мае нічога супольнага з „чыстатой“ матэматыкі ў сэнсе Іваноўскага. Наадварот, гэта „адцягненае“ разьвіцьцё матэматыкі вядзе нас усё далей да больш цеснага, конкрэтнага набліжэньня да рэальнага.

Гэтая навейшая матэматыка, якую магчыма ма' быць азначыць як „надбудоўлю“, не зьяўляецца, калі яе разглядаць об'ектыўна [1]), адкідаючы пэўныя формалістычныя пераўвялічэньні — прычым мы не разумеем пад гэтым важных абагульненьняў і паглыбленьняў матэматыкі—не зьяўляецца яна, паўтараю, ніякім адарваньнем ад рэальнасьці, ані шляхам да стварэньня „чыстай“ матэматыкі *самой у сабе*, як гэта здаецца Іваноўскаму, што для яго ня толькі зьяўляецца найвышэйшым ідэалам у адносінах да матэматыкі, а таксама і ў дачыненьні да кожнай навукі, да філёзофіі.

У сваёй кнізе „Метод. введ.“ ён піша на старонцы. XLII:

„Сейчас философия переживает у нас новый кризис. Хотелось бы думать, что она выйдет из него преобразованной и возрожденной; хотелось бы видеть, наконец, не прикладной (к религиозным и *политическим* настроениям), а подлинной, *независимой*, теоретической философией“ (курсыў мой—Ц. Б.).

Гэты філёзофічны пагляд Іваноўскага паказвае яскрава сапраўдны твар яго мэтодолёгіі. Сутнасьць гэтай апалітычнай, незалежнай, „тэорытычнай“ філёзофіі добра вядома, яна была і ёсьць сьвядомым або несьвядомым прыкрыцьцём усіх буржуазных палітычных і філёзофічных ідэолёгіяў, гэтага апалітычнага ашуканства, якое па сутнасьці зьяўляецца найбольшым палітычным ашуканствам буржуазных ідэолёгаў. Супастаўленьне палітыкі і рэлігіі гаворыць надта выразнай мовай, якая не патрабуе ніякіх комэнтараў. Яно яскрава кожнаму нашаму чытачу і ня можа яго заблытаць. Яно толькі даводзіць бесканцовую блытаніну пагляда ўаўтара, яго неразуменьне гістарычнага матэрыялізму, яго ідэолёгічную чужасьць пролетарскай культуры, пролетарскай клясавай філёзофіі.

---

[1]) Об'ектыўна, г. зн. згодна сутнасьці матэматыкі, але не суб'ектыўна, бо ёсьць шмат матэматыкаў, якія бачаць у матэматыцы „чыстую“, вольную навуку аб пабудаваньнях, і Іваноўскі адбівае ў пэўным сэнсе гэтыя суб'ектыўныя тэндэнцыі ў філёзофіі матэматыкі.

Іваноўскі гаворыць аб нейкім крызісе філёзофіі ў нас і *бачыць яго разьвязак у нейкай непрыстасавальнай, чыстай, незалежнай тэорытычнай філёзофіі.* Прыходзіцца сапраўды зьдзіўляцца і пытацца ў аўтара, аб якім крызісе ён гаворыць і як ён прыходзіць да гэтага разьвязку! Ці аўтар жыве па-за нашым жыцьцём, нашым змаганьнем за новую, пролетарскую культуру, па-за нашым соцыялістычным будаўніцтвам, па-за нашай сапраўднасьцю? Ці ён сапраўды нічога ня ведае аб мэтодолёгіі дыялектычнага матэрыялізму, ці ён сапраўды ня ведае, які сэнс мае філёзофія і якую функцыю яна павінна выпаўняць? *Гэтая чужасьць адносна соцыялізму, адносна пролетарскай культуры, зусім характэрна для аўтара і адпавядае яго філёзофічным поглядам,* з якіх адзін, поўны разрыў тэорыі і практыкі, нам цяпер зусім яскравы. І цяпер нам зусім ясна, што гэтая „незалежная“, „тэорытычная“, „чыстая“ філёзофія ня можа інакш „разьвязаць“ проблему адносін тэорыі і практыкі. Аўтар поўнасьцю супярэчыць геніяльным *тэзісам Маркса аб Фэйербаху:*

„Пытаньне, ці чалавечаму мысьленьню ўласьціва прадметная сапраўднасьць, не зьяўляецца ніякім пытаньнем тэорыі, але практычным пытаньнем. На практыцы павінен чалавек давесьці сапраўднасьць, г. зн. дзейнасьць і моц, па-гэту-староньнясьць (Diesseitigkeit) свайго мысьленьня. Спрэчка аб сапраўднасьці ці несапраўднасьці мысьленьня—якое ізолявана ад практыкі—зьяўляецца чыста схолястычным пытаньнем“.

„Філёзофы толькі розна растлумачвалі сусьвет; цяпер справа ў тым, каб яго зьмяніць“.

Нам цяпер зусім яскрава, што павінна азначаць ідэалістычная філёзофія Іваноўскага, яго проблема суадносін „чыстай“ і „прыстасавальнай“ матэматыкі і ўсякай навукі.

Гэтая мэтодолёгія Іваноўскага зьяўляецца таксама галоўнай асновай падзелу на „чыстую“ і „прыстасавальную“ матэматыку, прынцыповага мэтодолёгічнага падзелу, як мы ўбачым. Аўтар якраз дзеля гэтага бачыць у *мэтодычным* падзеле, які зьяўляецца толькі выразам мэтазгоднага падзелу працы, прынцыповы, *мэтодолёгічны* падзел. Мы ўбачым гэта ў далейшым, дзе мы будзем цытаваць пункт погляду Іваноўскага на проблему суадносін тэорыі і практыкі. Гэта вуаліраваньне сутнасьці навукі, гэта ствараньне „чыстых навук“ зьяўляецца тэндэнцыяй усіх ідэалістычных філёзофіяў.

Усе ідэалістычныя матэматыкі маюць імкненьне завуаліраваць сутнасьць матэматыкі, штурхнуць матэматыку ў чыста формалістычнае, аксыёматычнае рэчышча, стварыць з матэматыкі чыстую навуку ў сабе. Гэтая тэндэнцыя цесна зьвязана таксама з крызісам асноў матэматыкі, які з свайго боку зьяўляецца адлюстраваньнем крызісу буржуазнага ладу грамады, выразам ідэолёгіі тае клясы, якая стаіць па-за вытворчай падставай, як такавой.

Ёсьць, аднак, таксама матэматыкі, якія перасьцярагаюць перад гэтым апошнім крокам, і якія бачаць у супрацоўніцтве „чыстай“ і „прыстасавальнай“ матэматыкі істотны прогрэс (Клейн) [1].

Гэтая „надбудоўля“ вядзе об'ектыўна да ўсё большага паглыбленьня і абагульненьня. Сэнс гэтага паглыбленьня і абагульненьня не формалістычны і „бяссэнсны“, але, калі ня прымаць пад увагу чыста формалістычных пераўвялічэньняў, ён заключаецца ў сувязі гэтых конструкцый з „рэальнай“ матэматыкай.

Калі больш дакладна разглядаць матэматычныя абагульненьні і конструкцыі, дык усякаму кідаецца ў вочы, што нельга іх растлумачыць чыста формальна-лёгічна. Гэтак званая іманэнтная лёгіка матэматыкі існуе толькі ў чыста формальным разгляданьні матэматыкі, і ў разгляданьні матэматыкі больш паводле формы довадаў, чымся паводле зьместу. Але нават і матэматычная форма довадаў ня можа зьвесьціся да лёгічнай схемы формальнай лёгікі (поўная матэматычная індукцыя і г. д.). Мы скажам тут яшчэ некалькі слоў аб нашай проблеме з боку яе зьместу. Тут відаць надта яскрава дыялектычны характар матэматыкі, дыялектычнае разьвіцьцё матэматычных паняцьцяў, конструкцый і г. д., закон адзінства супярэчнасьцяў (гл. Яновская [2]). Калі разглядаць гэта разьвіцьцё гістарычна—а ня толькі, як іманэнтна-лёгічнае разьвіцьцё, як гэта амаль заўжды робяць матэматыкі, што зьяўляецца таксама аднэй з прычын таго, што яны бачаць толькі формальную і ўмоўную сутнасьць матэматыкі, а не яе зьмест і дыялектычны характар;—тады відаць надта прыгожа і яскрава матэрыялістычна-дыялек-

---

[1]) Ф. Клейн разумее сутнасьць навукі ў пэўным махістычным сэнсе.

[2]) С. Яновская: Закон единства противоположностей в математике. Естествознание и марксизм, 1929 (I).

У гэтай працы чытач знойдзе цэлы шэраг цікавых матэматычных проблем, разгледжаных з пункту гледжаньня дыялектычнага матэрыялізму.

тычны характар гэтага разьвіцьця [1]). Відаць, як матэматыка з поўнай гістарычнай неабходнасьцю вырастае на глебе эканомічных законаў, экономічных, тэхнічных патрэбнасьцяў (аналіз, дыфэрэнцыяльная геомэтрыя, дыфэрэнцыяльныя раўнаньні і г. д.).

Гэты характар матэматыкі часткова прызнаваў Г. Ганкэль, і хаця Ганкэль называе прынцып разьвіцьця матэматычных паняцьцяў прынцыпам захаваньня формальных законаў, значыць падкрэсьлівае яго формальны бок, аднак, гэты прынцып, калі яго разглядаць глыбей, зьяўляецца пэўным, хаця і ня зусім яскрава выказаным, адбіткам об'ектыўнага разьвіцьця матэматыкі. Яго дыялектычны характар ня можа быць нават Ганкэлем скрыты ў далейшым разьвіцьці яго думак, і ў яго прыстасаваньні да спэцыяльных проблем матэматыкі (геомэтрыя Грассмана, вэктарнае вылічэньне, кватэрніоны і г. д.).

Іваноўскі не разумее прынцыпу рэляцыянізму ў матэматыцы, якраз таксама, як яго не разумеюць усе формалісты і ідэалісты. З факту, што пэўная сыстэма ўласьцівасьцяў, альбо аксыём, неадназначна характарызуе сыстэму рэчаў, уласьцівасьці якой яна перадае, але што яна характарызуе цэлую клясу сыстэм рэчаў, робяць няправільны вывад, быццам матэматыка займаецца толькі сувязямі, але што яна ня мае нічога супольнага з об'ектамі, як такавымі, быццам матэматыка, як такавая, зьяўляецца толькі навукай аб суадносінах [2]).

Да такой самай думкі мог-бы дайсьці прадстаўнік якой-небудзь навукі, прыкладам фізыолёг, які дасьледуе функцыі чалавечага сэрца, і потым знаходзіць, што функцыянальныя сувязі, якія ён знайшоў для чалавечага сэрца, захоўваюць моц і для сэрца кожнага організму, ма'быць нават, што гэтыя сувязі, функцыі, таксама часткова магчыма знайсьці ў іншых частках організмаў,—гэткі фізыолёг ніколі ня прыдзе да думкі, каб гэтыя вынікі так растлумачыць, як быццам існуюць толькі функцыі, як такавыя, толькі яны важны, і што для яго ня мае ніякага значэньня, ці *існуе* нешта такое, як чалавечае сэрца. Я ўласна выбраў гэты цалкам трывіальны прыклад, каб паказаць, да якіх парадоксаў і немагчымых вынікаў вядзе прыняцьцё гэтага пункту гле-

---

[1]) Гл. Ф. Энгельса „Диалектика природы" Архив К. Маркса и Ф. Энгельса, книга вторая. 1925. Стр. 13, 53, 83, 205, 207.

[2]) Гл. больш падрабязна ў артыкуле С. Яноўскай: „Идеализм в современной философии математики". Естеств. и марксизм 1930, № 2-3, дзе яна выкрывае ідэалістычны характар рэляцыянізму Russell'я.

джаньня рэляцыянізму. Я не хачу гэтым зацьвярджаць, што пункт гледжаньня рэляцыянізму, як мэтоду працы, зьяўляецца цалкам памылковым. У ім хаваецца зярно ісьціны, здаровага мэтоду дасьледваньня—менавіта тое, што часта магчыма пэўныя сувязі між рэчамі дасьледваць, абстрагуючы ад саміх гэтых рэчаў, альбо што рэчы дасьледуюцца ў пэўнай надта простай форме, каб дасьледуемыя сувязі аказаліся не зацямнёнымі іншымі функцыямі і сувязямі. Гэта — ядро рэляцыянізму, як мэтоду дасьледваньня, як спрошчанага мэтоду вывучэньня. Усе іншыя вывады рэляцыянізму адносна існаваньня об'ектаў зьяўляюцца духоўнымі дзяцьмі ідэалістычных філёзофіяў, махізму, эмпірызму, эмпірыякрытыцызму [1]).

Прынцып рэляцыянізму разумее Іваноўскі наступным чынам („Працы II, старонка 21"):

„Да! она допускает *несколько* параллельных друг другу и теоретически одинаково обоснованных, равно логичных, равноправных и равно „возможных" конструкций той или иной области математического знания. Но именно поэтому „чистая" математика и *не имеет прямого отношения к реальности*. Она представляет собою лишь „репертуар" возможных пониманий действительности (из которых, быть может, ни одно *не охватывает этой действительности в целом)*, она есть как-бы „клавиатура", общий запас нот, из которого фактически будут приложены к действительности лишь одна или какая-либо комбинация нескольких". (Курсіў мой—Ц. Б.).

Гэтае выказаньне Іваноўскага правільна да пэўнай ступені, але цалкам няправільна формалістычна-ідэалістычнае разуменьне гэтага факту, як мы бачылі [2]).

Гэта самае магчыма сказаць адносна прынцыпу ізоморфіі, як мы раней ужо бачылі: і гэты важны матэматычны прынцып, які цесна зьвязан з рэляцыянізмам, і які імкнецца бліжэй характарызаваць клясу ўсіх сыстэм, якія маюць

---

[1]) Гэтая сутнасьць рэляцыянізму зьяўляецца яшчэ значна больш глыбокай і мае свае карэньні ў ідэалістычным сьветапоглядзе, у адмаўленьні існаваньня рэальнага зьнешняга сусьвету, у адмаўленьні існаваньня матэрыі.

[2]) Апрача таго было-б зусім незразумелым (з пункту гледжаньня Іваноўскага) рэальнае значэньне і магчымасьць прыстасаваньня матэматыкі. Але-ж і паняцьці, законы і г. д. „чыстай" матэматыкі з'яўляюцца такавымі-ж і для прыкладной матэматыкі. Дзеля гэтага перад намі ізноў стаіць тая-ж самая праблема магчымасьці прыстасаваньня і об'ектыўнасьці „чыстай" матэматыкі і прыкладной матэматыкі, г. значыць тая-ж самая проблема, толькі пастаўленая на іншыя рэйкі.

пэўныя ўласьцівасьці, альбо якія падпарадкаваны пэўным аксыёмам (як выражаецца матэматык ці аксыёматык),—і гэты прынцып разумее Іваноўскі ідэалістычна.

Але і навейшая аксыёматыка ня можа выратаваць існаваньня тае „чыстае“ матэматыкі ў сэнсе Іваноўскага. Чыстая „аксыёматыка“, якая „будуе“ матэматыку па-за ўсялякімі об'ектыўнымі суадносінамі—гэткая аксыёматыка існуе толькі ў думцы, па-за об'ектыўнасьцю. Калі-б нават было магчыма гэтую праграму сапраўды правесьці, яна паказала-б поўную безьзьмястоўнасьць, бяздумнасьць і бясплоднасьць гэтага прадпрыемства. Яна праявіла-б сябе як гульня, як разумовая гульня, а не як сур'ёзная навука. Але аксыёматыкі—надта хітрыя людзі, яны самі ня думаюць паводле гэтых безьзьмястоўных схэм, дзеля іх аксыёмы не зьяўляюцца толькі бяздумнымі схэмамі, якія нічога ня выказваюць; яны толькі хочуць угаварыць у няпрысьвечаных, што іхнія аксыёмы не датычацца рэчаіснасьці, і нават наогул ня маюць ніякага сэнсу, і ня хочуць здрадзіць „таямніцу“ аксыём.

Яны хочуць угаварыць у чытачоў, што кожная дэдукцыйная несупярэчная сыстэма аксыём прадстаўляе з сябе навуку.

Але ня кожная вольная ад супярэчнасьцяў „сыстэма аксыём“ разам з дэдукцыямі з іх зьяўляецца матэматычнай дысцыплінай. Для чыстых аксыёматыкаў аксыёмы зьяўляюцца толькі пэўнымі дагаворамі, правіламі, якія толькі павінны ствараць сыстэму, вольную ад супярэчнасьцяў. З гэтага пункту гледжаньня, аднак, адвольная гульня (шахматная гульня і г. д.)—матэматычная дысцыпліна. Але гэта недарэчнасьць.

Матэматыка ня гульня, а навука.

Матэматыку прыстасоўваюць з вялізарнейшым посьпехам амаль ва ўсіх прыродазнаўчых навуках, яна зьяўляецца дзейнай прыладай у нашых досьледах і адлюстроўвае об'ектыўныя сувязі і законамернасьці.

Ці-ж гэта зьяўляецца выпадковым? Не, гэта ляжыць у сутнасьці матэматыкі, бо ня ўсякая „свабодная“ канструкцыйная сыстэма ёсьць матэматыка. Аксыёмы матэматыкі выказваюць некаторыя об'ектыўныя суадносіны, яны выказваюць найбольш агульныя колькасныя і да некаторай ступені таксама якасныя суадносіны, як мы раней падкрэсьлівалі, сувязі між рэчамі, між працэсамі, і таму матэматыка мае об'ектыўнае значэньне, і таму магчыма яе прыстасоўваць.

І калі здаецца на першы погляд, што новая і навейшая матэматыка адарвалася цалкам ад сваёй базы і зьяўляецца

„вольнай“ конструкцыяй нашага розуму, тады гэта толькі павярхоўны погляд, бо нават найбольш адцягненая матэматыка, об‘ектыўна разглядаемая, мае конкрэтныя, рэальныя карэньні, яна зьяўляецца далейшым разьвіцьцём, абагульненьнем тае матэматыкі, якую Івваноўскі азначае як „прыстасавальную“ матэматыку. Адцягненыя пабудовы, як прыкладам лічэньне матрыц, некомутатыўныя гіпэркомплексныя лікі і г. д., ёсьць прылада ў новай квантавай фізыцы, яны там маюць вялізнае значэньне. І гэта зусім ня дзіўна, бо гэтыя паводле Іваноўскага вольныя лёгічныя пабудовы ў іх гістарычным разьвіцьці якраз зьяўляюцца матэматычнымі пабудовамі. Об‘ектыўнай тэндэнцыяй матэматыкі зьяўляецца не прынцыповы падзел між тэорыяй і практыкай, аддзяленьне тэорыі ад практыкі, „чыстай“ ад „прыстасавальнай“ матэматыкі, чыстай“ ад „рэальнай“ навукі, як думае Іваноўскі, які кажа [1]): „несмотря на принципиальное различие между теорией и практикой, в обычном человеческом мышлении их специфические точки зрения нередко смешиваются, и это, как всякая методологическая путаница, вредит обеим сторонам“; а сынтэз, органічны сынтэз, зьяўляецца об‘ектыўнай, а не суб‘ектыўнай тэндэнцыяй матэматыкі, як я ўжо падкрэсьліваў, бо ёсьць надта шмат матэматыкаў, якія цалкам скажаюць сутнасьць матэматыкі, вуаліруюць яе, і якія ў матэматыцы бачаць толькі „чыстую матэматыку“. Толькі што прыведзеная цытата паказвае яскрава мэтодолёгічную аснову абсолютнага неразрыву тэорыі і практыкі, яна зьяўляецца менавіта нероднай дзіцянём буржуазнай ідэалістычнай філёзофіі, і мае свае рэальныя карэньні ў кожнай клясавай грамадзе, у якой існуюць клясавыя супярэчнасьці. „Тэорыя робіцца беспрадметнай, калі яна ня зьвязваецца з рэволюцыйнай практыкай, таксама як і практыка робіцца сьляпой, калі яна не асьвятляе сабе шляху рэволюцыйнай тэорыяй. Але тэорыя можа ператварыцца ў вялізарнейшую сілу рабочага руху, калі яна ствараецца ў непарыўнай сувязі з рэволюцыйнай практыкай, бо яна, і толькі яна, можа даць руху ўпэўненасьць, сілу орыентацыі і разуменьне ўнутраное сувязі акаляючых здарэньняў, бо яна, і толькі яна, можа дапамагчы практыцы зразумець ня толькі тое, як і куды рухаюцца клясы ў сучаснасьці, але і тое, як і куды яны павінны рушыцца ў бліжэйшай будучыні“ [2]). Я зраблю яшчэ адну важную заўвагу, каб нашы растлумачэньні не вялі да непа-

[1]) Метод. введ., старонка 162.
[2]) Сталін: Вопросы Ленинизма. Стр. 81.

разуменьняў. Калі мы выступаем супроць прынцыповага адрыву тэорыі ад практыкі, мы, аднак, не прытрымліваемся погляду, што практыка і тэорыя—адно, што яны азначаюць адно і тое самае, і што няма аніякае розьніцы паміж імі. Гэта не зьяўляецца нашым пунктам гледжаньня, пунктам гледжаньня дыялектычнага матэрыялізму. Мы гэта часта падкрэсьлівалі і ў гэтай працы. Адзінства тэорыі і практыкі мы павінны разумець, як дыялектычнае адзінства, як адзінства адрозьненьняў, супярэчнасьцяў, як адзінства, у якім практыка ў найбольш шырокім сэнсе гэтага слова мае прымат,—практыка, як крытэры об'ектыўнасьці, об'ектыўнай праўдзівасьці тэорыі.

У гэтым самым сэнсе мы разумеем таксама адзінства і адрозьненьне „чыстай“ і „прыстасавальнай“ матэматыкі, у гэтым сэнсе мы разумеем сэнс праўдзівасьці ўсякае навукі, значыцца, і матэматыкі.

Падзел на „чыстую“ і „прыстасавальную“ матэматыку не зьяўляецца, значыцца, ніякім мэтодолёгічным падзелам, прынцыповым падзелам, як думае Івaноўскі і шмат якія іншыя, але падзелам працы і галін, падзелам, які об'ектыўна вядзе да больш высокага, органічнага сынтэзу на базе больш глыбокага об'ектывізаваньня, конкрэтызаваньня, конструкцыйнага абагульненьня, якасных мэтодаў і г. д., прычым ніводная з гэтых галін ня губляе пры гэтым сваёй самастойнасьці.

Пасьля гэтых заўваг мы прывядзем яшчэ некалькі характэрных поглядаў у форме цытат, якія выразна і яшчэ яскравей пакажуць праўдзівы твар філёзофіі аўтара.

Івaноўскі зьяўляецца таксама схэматычным формалістам, у яго падзел, азначэньне, адыгрываюць выдатную ролю, ён думае разьвязаць найбольш цяжкія і важнейшыя проблемы, уводзячы новы падзел, альбо па Маху, азначае ўсю проблему як чыста тэрмінолёгічную проблему, спрэчку аб словах. Івaноўскі хоча часта разыгрываць ролю філёзофа, які ўсю рэчаіснасьць, усё разьвіцьцё разглядае sub specie aeternitatis, з пункту гледжаньня нейкай „чыстай“ тэорытычнай навукі, якая незалежна ад практычных і палітычных або іншых уплываў (глядзі ранейшую цытату).

Гэтая цытата характэрна для Івaноўскага, які выступае адкрыта, як абаронца буржуазнай ідэалістычнай філёзофіі супроць філёзофіі пролетарыяту, які пад лёзунгам „добрых старых традыцый“ [1]) праводзіць адчынены вялікадзяржаўны шовінізм, маскуючы свае контррэволюцыйныя мары

[1]) Метод. введ., старонка IV, V, VII, VIII, XVI.

пад формай: „мы ня ведаем яшчэ тых экономічных форм“ ... і г. д.

„Добрые старые традиции серьезности и основательности“...

„Своей работой я хотел-бы посильно помочь превращению нашей русской философии в серьёзную школу научной мысли... *мы не знаем еще тех окончательных форм, в которые выльется у нас новый общественный порядок:* мы живем в момент перестройки старого здания“ [1]... (Падкр. мною—Ц. Б.).

Іваноўскі ведае ўсе магчымыя культурныя формацыі, толькі пра адну, пра пролетарскую культуру ён ня хоча нічога ведаць.

Іваноўскі ведае ўсе магчымыя і немагчымыя філёзофічныя сыстэмы, але аб філёзофіі дыялектычнага матэрыялізму ён можа сказаць толькі наступнае [2]:

„У Маркса „диалектика“, оставаясь онтологическим принципом мирового процесса, получает характер реалистический: это основной принцип реального развития, состоящий в том, что всякий факт содержит в себе, в известном смысле, свою противоположность и в известный момент в нее переходит“ (sic!!).

І потым у іншым месцы, дзе ён гаворыць аб барацьбе між матэрыялізмам і ідэалізмам, і наканец пагарджае ўсёй гэтай барацьбой і кажа [3]:

„Обсуждение их требует предварительного отчетливого установления значений основных философских терминов“ (sic!!).

Івановскі разам з гэтым абсолютны прыхільнік мэханістычнага сьветапогляду; ён кажа [4]:

„Ни один пролетарский мыслитель не отрицает механической картины мира...

Механическая картина мира—один из отстоявшихся, проверенных и доказанных пластов, отложенных культурами прежних эпох, вошедших в общечеловеческий капитал и доставшихся нам по традиции, по наследству, и задача общечеловеческой науки и философии, *обязательная и для пролетариата*—собрать, систематизировать и провести дальше

[1]) Метод. введ., старонка IV, V, VII, VIII, XVI.
[2]) Старонка 143 „Метод. введ.“.
[3]) Метод введ., старонка XXXVIII.
[4]) Метод. введ., старонка XXVII.

эти прочные приобретения прежних эпох... она „истинна“, т. е. проверена и доказана“.

І ён зацьвярджае, што задачай пролетарыяту можа зьяўляцца па большай меры—далей разьвіваць гэты сьветапогляд, яго сыстэматызаваць і дапоўніць.

Я прывёў толькі некалькі цытат, характэрных для ідэалістычнае, эклектычнае філёзофіі Івапоўскага, гэтай буржуазна-нацыяналістычнай „бясклясавай“, антыпролетарскай філёзофіі. Гэтая об'ектыўная навука, гэтая „незалежная“ навуковая філёзофія Іваноўскага не зьяўляецца нічым іншым, як выразам яго лібэральнае, буржуазнае ідэолёгіі, якая ўсё разважае па-за клясавай барацьбой і гістарычным разьвіцьцём, „об'ектыўна“, але гэты „об'ектывізм“ зьяўляецца па сутнасьці антыпролетарскай, антымарксысцкай, буржуазнай філёзофіяй.

Я думаю, што цяпер ясна, як філёзофічныя погляды Іваноўскага адбіліся на яго філёзофіі матэматыкі, ясна нам таксама гэта „прынцыповае“ дзяленьне на „чыстую“ і „прыстасавальную“ матэматыку, яно зьяўляецца толькі выразам усяе рэакцыйнай філёзофіі ідэалізму аўтара.

Мы бачылі ў нашай працы, як усе навейшыя матэматычна-філёзофічныя погляды вядуць у ідэалістычнае рэчышча [1]), і гэта, як мы бачылі, зьявішча не выпадковае.

Матэрыялістычная дыялектыка адкрыла нам сутнасьць усіх гэтых ідэалістычных школ, ідэалізму Іваноўскага [2]), і мы ў працягу нашай працы бачылі значэньне матэрыялістычнай дыялектыкі і дзеля разьвязваньня проблем філёзофіі матэматыкі, яе гісторыі і абгрунтаваньня.

Сутнасьць матэматыкі, яе гісторыі, і яе сапраўднае абгрунтаваньне можа даць толькі такая філёзофія, якая правільна адбівае самыя агульныя законы і сувязі ўсяго разьвіцьця і руху ў прыродзе і грамадзе, а гэта—філёзофія дыялектычнага матэрыялізму.

Нашай важнейшай задачай на гэтым фронце зьяўляецца якраз абгрунтаваньне матэматыкі на базе дыялектычнага матэрыялізму, гэта значыць, як правільна кажа Яноўская, „перарабіць яе на аснове тэорытычнага ўсьведамленьня

---

[1]) С. Яновская: Идеализм в современной философии математики. Ест твознание и марксизм, 2-3, 1930.

[2]) Іваноўскі не зьяўляецца пасьлядоўным ідэалістам, ён па сутнасьц ідэалістычны эклектык, у якога погляды кантызму, позытывізму, прагматызму рікэртыянізму, мэханіцызму і г. д. усе жывуць разам.

і прадбачаньня задач, якія стаяць перад практыкай социялістычнага будаўніцтва“ [1]).

І як падкрэсьлівае яшчэ мацней і яскравей Кольман [2]).

„Матэматыка павінна быць цясьнейшым чынам зьвязана ня толькі знадворна, ня толькі організацыйна, але ўсёй сваёй структурай, усім сваім зьместам, з нашым соцыялістычным будаўніцтвам, павінна быць падпарадкавана задачам соцыялістычнага будаўніцтва, і ня можа быць адарвана ані ад філёзофіі дыялектычнага матэрыялізму, ані ад політыкі партыі“.

---

[1]) Там-жа, старонка 30.
[2]) Э. Кольман: Политика, экономика, математика

Некалькі заўваг аб аксыёматыцы геомэтрыі.

Ч. Ч. Дамброўскі. Менск.

Ёсьць у матэматыцы дваякі падыход да аксыёматыкі: адны законна ўжываюць яе, як сродак сыстэматызацыі матэматычных дысцыплін: другія-ж робяць з аксыёматыкі *напрамак* у філёзофіі матэматыкі, у яе мэтодолёгіі.

Гэтыя апошнія „аксыёматыкі“ — я іх буду называць „аксыёматыстамі“ [1])—вуаліруюць сваю аксыёматыку, каб не паказаць канчаткова і ясна, куды яна вядзе.

У 1928 г., у „Einige Vereinfachungen...“ („Працы Б.Дз.У.“, № 17—18), я паказаў на аксыёматыцы геомэтрыі, што яна можа быць ператворана ў шэраг *выразных*, хаця і дэскрыптыўных, азначэньняў (дэфініцый). Гэта даводзіць, што аксыёматысты, якія *абмяжоўваюць* матэматыку лёгічнымі імплікацыямі аксыём—вядуць да *конвэнцыяналізму*.

Гэткім чынам я абнажыў завуаляваную „аксыёматыстамі“ сутнасьць аксыём геомэтрыі.

Ня гледзячы на тое, што Гільбэрт і Акерман прызнаюць у „Grundzüge der theoretischen Logik“ (старонка 75), што аксыёмы геомэтрыі—элемэнты дэфініцыі асноўных паняцьцяў геомэтрыі—шмат якія аксыёматысты ня любяць гэткага абнажэньня завуаляванай імі сутнасьці аксыём. Ім больш выгодна „аполітычнае“ ў філёзофічным сэнсе становішча адносна сыстэмы аксыём. Гэткае становішча, гэткі погляд мы бачым і ў амэрыканскага аксыёматыка Вэблена („A system of axioms for geometry, July 1904, Transactions

---

[1]) Падобна таму, як ёсьць коопэратары і коопэратысты: апошнія лічаць, што ва ўмовах капіталістычных краін непатрэбна барацьба за дыктатуру пролетарыяту—коопэрацыя, моў, самацёкам давядзе да соцыялізму.

of the American Mathematical Society, том пяты, № 3, старонка 346).

Вядучы да конвэнцыяналізму, концэпцыі аксыёматыстаў падтрымліваюць ідэалістычныя ўстаноўкі школы Russell'я ў філёзофіі матэматыкі.

Вуаляваньне асноў матэматыкі ў Рассэля даходзіла, як вядома, да парадоксальных яго выказваньняў, як славутае: „матэматыка ёсьць навука, якая ніколі ня ведае, аб чым гаворыць, і ці праўда тое, што яна гаворыць“.

Я паказаў у „Einige Vereinfachungen...“, што сарваўшы вуаль з аксыём („définitions déguisées“, як казаў аб іх Poincaré), мы аб геомэтрыі павінны сказаць, што яна ўжо не гіпотэтычна—яна ведае, аб чым гаворыць—аб усім, што здавальняе постуляты, і гэтым заслугоўвае назовы пунктаў і г. д.

Другое пытаньне—ці праўда тое, што геомэтрыя гаворыць. Простая лёгіка даводзіць, што гэта *бязумоўна* праўда, *калі толькі існуюць* об'екты геомэтрыі.

Каб адказаць яскрава на пытаньне аб іх існаваньні, трэба дакладна ўстанавіць *сэнс існаваньня* ў матэматыцы.

Але перш-на-перш сэнс існаваньня *ў матэматыцы* не павінен быць адарваны ад сэнсу існаваньня па-за матэматыкай, у прыродазнаўстве наогул.

Інакш ён лёгка можа стаць суб'ектыўна-ідэалістычным, бадай нават соліпсыстычным.

Па-другое, калі-б мы называлі існуючым у матэматыцы толькі тое, што ня тоіць у сабе супярэчнасьцяў, дык для нас зараз ня было-б даведзена „існаваньне“ натуральных лікаў.

І буржуазная філёзофія матэматыкі зараз „ня можа давесьці існаваньня“ натуральных лікаў, г. зн. об'ектаў, якія здавальняюць 5 аксыём Пэано (гл. Hilbert u. Ackermann, op. cit., старонка 48).

Разам з гэтым, значыць, буржуазная філёзофія матэматыкі ня можа „давесьці існаваньня“ ўсіх іншых об'ектаў матэматыкі, бо яно лёгічна ўпіраецца ў існаваньне натуральных лікаў.

Якое-ж становішча павінен заняць да гэтай проблемы пролетарыят і яго філёзофія—дыялектычны матэрыялізм?

Аб гэтым ужо пісаў Егоршын у кніжцы: „Естествознание, философия и марксизм“ (Госиздат РСФСР, „Московский Рабочий“, 1930). Але калі Егоршын бачыць у формальнай матэматыцы, у клясычнай тэорыі дробаў, у асно-

вах арытмэтыкі *толькі* матэрыял, карысны для ідэалістаў, дык ён на тэорытычную арытмэтыку глядзіць з тэй аднабокасьцю, супроць якой сам робіць агаворку адносна аксыёматыкі. Карацей гаворачы, ён непасьлядоўны сам з сабою.

Клясычныя асновы арытмэтыкі, таксама, як выяўленьне дэфініцыйнай сутнасьці аксыём геомэтрыі, нам патрэбны, каб паказаць, што для тых, для якіх уся матэматыка *абмяжоўваецца* імплікацыямі з аксыём, *існаваньне* дробаў, адносных лікаў, мнімых лікаў—упіраецца ў проблему існаваньня натуральных лікаў.

Гэта надзвычайна важна для філёзофіі матэматыкі, для вастраты тае крытыкі, якую нараджаючаяся пролетарская філёзофія матэматыкі павінна прыстасаваць да буржуазнай філёзофіі матэматыкі.

Магчыма было-б думаць, што аксыёматызуюцца толькі тыя навукі, якія паміраюць, якія ўжо ня маюць надзеі абагаціцца новымі фактамі.

Але прыклад геомэтрыі і мэханікі сьведчыць, што гэта ня так: час ад часу пэўная навука *сыстэматызуе* свой матэрыял, накоплены вопытам над рэальным сусьветам; у матэматычных навуках гэты вопыт завастраецца „экстраполяцыяй у бесканечнасьць" (напрыклад, бяскрайнасьць і бесканечная шчыльнасьць простай, дэзатомізацыя масы, дэквантызацыя часу, энэргіі і г. д. і да г. пад.).

Потым, стварыўшы, напр., „абстрактную эўклідаву прастору", „абстрактную групу эўклідавых рухаў", — даная навука з гэтым паняцьцем, як з меркай, прыступае ізноў да рэальных зьявішчаў сусьвету.

Для адшліфаваньня гэткай „меркі" і ўжываецца аксыёматыка.

Потым аказваецца, прыкладам, што мерка ня зусім пасуе да рэальнага сусьвету (акрамя „экстраполяцыі ў бесканечнасьць"): навука прабуе перарабіць мерку, стварае неэўклідаву геомэтрыю, эйнштэйнаву мэханіку, тэорыю квантаў, атомаў, хваляў і г. д.

У процэсе распрацоўкі гэтых тэорый яны яшчэ не аксыёматызуюцца: аксыёматызуюцца толькі *застыгаючыя* тэорыі, застыгаючыя часьціны данае навуковае дысцыпліны, якія *неабходна павінны* застыгнуць, каб стаць „меркамі" для далейшай працы данае навукі пры яе прытыканьні да рэальнага сусьвету.

Процэс застыганьня і ёсьць процэс аксыёматызацыі, пэрыод застыганьня і ёсьць пэрыод аксыёматызацыі.

Таму нельга гаварыць аб аксыёматыцы *ўсяе* геомэтрыі, усяе мэханікі, усяе арытмэтыкі, усяе тэорыі мностваў—але толькі аб аксыёматыцы эўклідавай геомэтрыі, аб аксыёматыцы геомэтрыі Лобачэўскага, Рыманна і г. д. і да г. пад.

Аксыёматызававая „мерка"—гэта як брытва: вытварэньне яе—справа матэматыкі— ня можа быць названа „чыстай навукай", а прыстасаваньне да рэальнасьці—„рэальнай навукай"—як называе Ўл. Іваноўскі ў артыкуле „Из лекций по методологии наук", глава II, „Працы Б. Дз. У.", № 8-9-10 і 17-18—таксама, як вытворства брытваў ня ёсьць „чыстае мэталічнае вытворства", а праца цырульніка ня ёсьць „рэальнае мэталічнае вытворства".

Цырульнік, аднак, ня толькі голіць барады, але і правіць брытвы, і дае заказы мэталісту; таксама мэханік, геодэт, астроном ня толькі прыстасоўваюць матэматыку, але і вострацъ яе і даюць заказы—соцыяльныя заказы—матэматыкам.

Вастрэньне брытваў неабходна ў час працы цырульні; адшліфоўваньне матэматычных „мерак" ня менш неабходна ў час напружанага будаўніцтва прыстасавальных навук, у час соцыялістычнага будаўніцтва.

Адшліфоўка эўклідавай геомэтрыі ўжо заканчваецца (гл. „Einige Vereinfachungen...", „Працы Б. Дз. У.", № 17-18, 1928, старонка 210). Чарга за адшліфоўкай рыманнавай геомэтрыі, эйнштэйнавай мэханікі, тэорыі квантаў і хваль і г. д.

Некалькі заўваг да тэорыі сілавога поля.

Ц. Бурстын ў Менску.

Гэтая запіска зьяўляецца вынікам кароткага абгаварэньня аднэй задачы, якую я разглядаў у маіх працах, прысьвечаных проблемам дыфэрэнцыяльнай геометрыі ў мэханіцы, а таксама і фізыцы.

Справа ідзе аб элэмантарнай задачы ў фізыцы, а менавіта, аб суадносінах, якія існуюць паміж сілавымі лініямі і траекторыямі матэрыяльных частачак у сілавым полі.

Часта, на пытаньне, што сабою прадстаўляе сілавая лінія, атрымаюць наступны адказ: сілавая лінія зьяўлядцца траекторыяй свабодна рухаючагася пункту [1]) у сілавым полі. Такі адказ толькі ў тым выпадку зьяўляецца справідловым, калі сілавыя лініі прадстаўляюць сабою простыя лініі, але ў агульным выпадку, калі сілавыя лініі не зьяўляюцца простымі, гэты адказ несправідловы.

Дзеля таго, каб гэтае пытаньне ўсебакова вырашыць, мы павінны яго матэматычна абгрунтаваць.

Пры гэтым выявіцца, як лёгка магчыма гэтае пытаньне разьвязаць.

Толькі такім чынам мы атрымаем неабходныя і дастатковыя ўмовы для таго, каб усе сілавыя лініі зьяўляліся траекторыямі сілавога поля.

---

[1]) Далей мы бярэм частачкі такімі маленькімі, што яны бесканцова мала ўзьдзейнічаюць на поле, гэта значыць, што мы не павінны зьвяртаць ніякае ўвагі на іх уплыў.-

Аб прынцыповай дапушчальнасьці гэтае прадпасылкі мы гаварыць ня будзем, бо мы маем пэўнае права абіраць нашыя частачкі да таго малымі, што іх уплыў будзе раўняцца О.

§ 1.

Дапусьцім, што цана сілавое поле з компонэнтамі

(1) $$X_i\ (x_1,\ x_2,\ x_3)$$ [2]),

прычым

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z.$$

Калі частачка дана, то яе траекторыя атрымаецца пры разьвязаньні сыстэмы дыфэрэнцыяльных раўнаньняў

(2) $$\frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i\ (x_1,\ x_2,\ x_3);\ i = 1,\ 2,\ 3;$$

пры гэтым маса кожнае частачкі прымаецца за адзінку.

Але мы добра ведаем, што дыф. раўн. сілавых ліній зьяўляецца

(3) $$\frac{dx_i}{dt} = \lambda(x_1,\ x_2,\ x_3)\ X_i\ (x_1,\ x_2,\ x_3)$$ [3]); $i = 1, 2, 3$;

а таму, разглядаючы раўнаньні (2), (3), мы бачым, што нагул сілавыя лініі не зьяўляюцца траекторыямі. У сапраўднасьці сілавая лінія (3) мае тую ўласьцівасьць, што яе датычная, а значыць і напрамак яе хуткасьці ў кожным пункце супадае з напрамкам вэктару (X_i) сілавога поля, у тэй час, калі для траекторыі прыскарэньне мае напрамак вэктару (X_i) сілавога поля.

Калі мы хочам, каб сілавая лінія аднačасова была-б і траекторыяй сілавога поля, дык трэба, выходзячы з папярэдніх прадпасылак, каб напрамак скорасьці сілавой лініі супадаў з напрамкам прыскарэньня сілавой лініі. Такім чынам мы атрымаем

(4) $$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \sigma \frac{dx_i}{dt};\ i = 1,\ 2,\ 3;$$ дзе:

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}.$$

З другога боку нам з мэханікі вядома, што

(5) $$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}\ \frac{dx_i}{dt} + \frac{v^2}{\rho}\ n_i;\ i = 1,\ 2,\ 3$$ [4]).

---

[2]) Выпадак, калі X_i зьяўляецца функцыяй часу, можна разьвязаць такім самым чынам.

[3]) Сілавая лінія мае тую ўласьцівасьць, што яе тангэнта супадае з напрамкам сілавога поля вэктару (X_i).

Цяпер зьвяжам парамэтр крывой з часам t, тады атрымаем раўнаньне (3).

[4]) Раўнаньне (5) вынікае з асноўных палажэньнчў мэханікі і з раўнаньняў Frenet'а тэорыі крывых.

Значэньні гэтых літараў наступныя: 1) $v = \frac{ds}{dt}$; 2) n_i — адзінкавы вэктар галоўнае нормалі крывой; 3) $\frac{1}{\rho}$ — крывізна крывой; 4) s — даўжыня дугі.

З (4), (5) вынікае:

$$\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx_i}{dt} + \frac{v^2}{\rho} n_i = \sigma \frac{dx_i}{dt},\ i = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Такім чынам, маем

$$\sigma = \frac{d^2s}{dt^2};\ \frac{v^2}{\rho} = O. \tag{7}$$

Але з прычыны таго, што $v \neq O$, мы павінны прымаць, што

$$\frac{1}{\rho} = O, \tag{8}$$

гэта значыць, што крывізна нашай траекторыяльнай сілавой лініі роўна нулю, што роўнасільна таму, што крывая прадстаўляе сабою простую лінію.

Мы цяпер можам зрабіць наступны вывад: сілавая лінія зьяўляецца траекторыяй толькі тады, калі яна ёсьць простая лінія.

Таксама можна сказаць наадварот, а менавіта: калі сілавая лінія, альбо траекторыя, зьяўляецца простаю лініяй, тады траекторыя прадстаўляе сабою сілавую лінію (або наадварот).

Апошняя заўвага вынікае з (8), (5), (3), (2), што зьяўляецца яскравым.

Такім чынам, мы давялі, што дастатковаю і неабходнаю ўмоваю для таго, каб сілавая лінія зьяўлялася траекторыяй, можа служыць просталінійнасьць сілавых ліній.

У тым выпадку, калі агульныя сілавыя лініі зьяўляюцца траекторыямі сілавога поля (1), тады ўсе сілавыя лініі поля — простыя лініі. Зразумела бяз усякіх паясьненьняў, што наша думка справядліва таксама і ў тым выпадку для сілавога поля, калі апошняе залежыць ад часу: $[X_i\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)];\ i = 1, 2, 3$.

У сапраўднасьці мы бачым, што мы пры нашым довадзе зусім не карысталіся незалежнасьцю нашага сілавога поля ад часу, а таму наша тэорэма справідлова і для сілавога поля $X_i\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$.

Далей мы павінны знайсьці агульнае выражэньне для сілавога поля (X_i (x_1, x_2, x_3, t), для якога ўсе сілавыя лініі зьяўляюцца простымі.

Для гэтае мэты мы бярэм ∞^2 простых ліній у прасторы.

Няхай будзе (9) $x_i = a_i(u, v)\,\tau + b_i(u, v)$; $i = 1, 2, 3$ мноства гэтых простых.

Мы бачым, што (9) прадстаўляе сабою агульны выраз для ∞^2 простых ліній.

З (3) вынікае тады, што

$$(10)\quad \frac{dx_i}{dt} = a_i(u, v) = \lambda(x_1, x_2, x_3)\, X_i(x_1, x_2, x_3);\ i = 1, 2, 3.$$

Такім чынам, атрымаем

$$(10')\qquad X_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{a_i(u, v)}{\lambda(x_1, x_2, x_3)};\ i = 1, 2, 3.$$

Калі мы цяпер выключым з раўнаньня (9) u, v, τ, г. зн. тыя вялічыні, якія прадстаўляюць сабою функцыі ад x_1, x_2, x_3, тады атрымаем

(11) $u = f(x_1, x_2, x_3)$; $v = \varphi(x_1, x_2, x_3)$; $\tau = \chi(x_1, x_2\ x_3)$; урэшце падставім гэтыя значэньні ў (10'), тады атрымаем агульны выраз для сілавога поля

$$(12)\quad X_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{a_i(f(x_1, x_2, x_3), \varphi(x_1, x_2, x_3))}{\lambda(x_1, x_2, x_3)}.$$

Einige Bemerkungen zur Theorie des Kraftfeldes.

Von C. Burstin in Minsk.

Diese Note ist zum Teil eine kurze Besprechung einer Aufgabe, die ich in meiner Arbeiten, welche den Problemen der Differentialgeometrie in der Mechanik und der Physik gewidmet sind, behandelt habe. Es handelt sich hier um eine ganz elementare Aufgabe der Physik und zwar, um den Zusammenhang zwischen den Kraftlinien und den Trajektorien materieller Teilchen, in einem Kraftfelde. Oft bekommt man, auf die Frage, was ist eine Kraftlinie, die Antwort: die Trajektorie eines sich frei in einem Kraftfelde bewegenden Teilchens [1]). Die Antwort ist aber richtig nur in dem Fall, im welchen die Kraftlinien Gerade Linien sind, im allgemeinen Falle, im welchen die Kraftlinien keine Gerade Linien sind, ist die Antwort falsch. Um den Sachverhalt vollständig aufzuklären, wollen wir die Aufgabe mathematisch behandeln. Es wird sich dabei zeigen, wie einfach das Problem zu lösen ist, und es werden von selbst sich notwendige und hinreichende Bedingungen dafür ergeben, dass alle Kraftlinien Trajektorien des Kraftfeldes sind.

§ 1.

Es sei gegeben ein Kraftfeld mit den Komponenten:

(1) $$X_i(x_1, x_2, x_3);\ ^{2)} \quad i = 1, 2, 3$$

wobei $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ ist.

[1]) Das Teilchen nehmen wir so klein, dass es das Kraftfeld unendlich wenig beeinflusst, d. h. so wenig, dass man den Einfluss nicht berücksichtigen muss. Die prinzipielle Zulässigkeit dieser Annahme wollen wir hier nicht besprechen, es ist klar, dass wir das Teilchen so klein wählen können, dass der Einfluss praktisch Null ist.

[2]) Der Fall, wo (X_i) eine Funktion der Zeit ist, erledigt sich auf dieselbe Weise.

Ist also ein Teilchen gegeben, so ist seine Trajektorie im Kraftfelde (1) die Lösung des Systems der Differentialgleichungen (der Newton'schen Bewegungsgleichungen):

$$(2) \qquad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i (x_1, x_2, x_3); \quad i = 1, 2, 3$$

wobei die Masse des Teilchens gleich Eins angenommen wurde.

Die Differenzialgleichungen der Kraftlinien des Feldes (1) sind aber:

$$(3) \quad \frac{dx_i}{dt} = \lambda (x_1, x_2, x_3) \; X_i (x_1, x_2, x_3) \;{}^{3)}; \quad i = 1, 2, 3.$$

Aus (2), (3) folgt schon, dass im allgemeinen die Kraftlinien keine Trajektorien sind. In der Tat, hat ja die Kraftlinie (3) die Eigenschaft, dass ihre Tangente, also ihre Geschwindigkeit in jedem Punkte mit der Richtung des Vektors (X_i) des Kraftfeldes zusammenfällt, während für die Trajektorien die Beschleunigung die Richtung des Vektors (X_i) des Kraftfeldes besitzt. Soll also die Kraftlinie zugleich eine Trajektorie des Kraftfeldes sein, so muss dann nach dem Vorhergehenden die Richtung der Geschwindigkeit der Kraftlinie mit der Richtung der Beschleunigung der Kraftlinie, zusammenfallen, es muss also:

$$(4) \qquad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sigma \frac{dx_i}{dt}; \quad i = 1, 2, 3.$$

wo $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ ist, sein.

Andrerseits ist es aus der Mechanik bekannt, dass:

$$(5) \qquad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{d^2 s}{dt^2} \cdot \frac{dx_i}{dt} + \frac{v^2}{\rho} n_i \;{}^{4)}; \quad i = 1, 2, 3;$$

wobei $v = \frac{ds}{dt}$, n_i der Einheitsvektor der Hauptnormale der Kurve, $\frac{1}{\rho}$ die Krümmung der Kurve und s die Bogenlänge ist.

Aus (4), (5) folgt:

$$(6) \qquad \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} + n_i \frac{v^2}{\rho} = \sigma \frac{dx_i}{dt}; \quad i = 1, 2, 3;$$

---

[3]) Die Kraftlinie hat die Eigenschaft, dass ihre Tangente, welche ja die Richtung der Geschwindigkeit besitzt, mit der Richtung des Vektors (X_i) des Kraftfeldes zusamenfällt; führen wir als den Parameter der Kurve die Zeit t ein, so bekommen wir die Gleichung (3).

[4]) Die Beziehung (5) folgt aus den Hauptgleichungen der Mechanik, indem man in (5) die Frenet'gleichungen der Kurventheorie anwendet.

also:

$$(7) \qquad \sigma = \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad \frac{v^2}{\rho} = 0$$

Da aber $v \neq 0$ ist, so muss demnach für die Kurve

$$(8) \qquad \frac{1}{\rho} = 0 \text{ sein,}$$

d. h. die Krümmung unserer Trajektorie-Kraftlinie ist Null, es ist also unsere Kurve eine Gerade Linie. Wir sehen also, dass wenn eine Kraftlinie eine Trajektorie ist, dass sie dann eine Gerade ist.

Aber auch umgekehrt, ist eine Kraftlinie resp. eine Trajektorie eine Gerade, dann ist sie eine Trajektorie resp. eine Kraftlinie. Diese letzte Behauptung folgt aus (8), (6), (5), (3) und (2), wie man ohne weiteres einsehen kann.

Wir haben demnach bewiesen, dass die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Kraftlinie eine Trajektorie ist, ist die Geradheit der Kraftlinie.

Sind also alle Kraftlinien Trajektorien des Kraftfeldes (1), dann sind alle Kraftlinien von (1) Geraden. Man sieht ohne weiteres, dass unsere Behauptung auch für den Fall eines von Zeit abhängigen Kraftfeldes $X_i (x_1, x_2, x_3, t)$, $i=1, 2, 3$ richtig ist. In der Tat, haben wir gesehen, dass wir in unserem Beweise die Unabhängigkeit unseres Kraftfeldes von der Zeit nicht benützt haben und demnach ist unser Satz auch für den Fall des Kraftfeldes $X_i (x_1, x_2, x_3, t)$ richtig.

Wir wollen zum Schluss den allgemeinen Ausdruck des Kraftfeldes $X_i (x_1 \, x_2 \, x_3)$ finden, für welchen alle Kraftlinien Gerade sind.

Zu diesem Zwecke nehmen wir eine ∞^2-Schar von Geraden im Raume, es sei:

$$(9) \qquad x_i = a_i(u, v)\,\tau + b_i(u, v); \quad i = 1, 2, 3$$

eine Schar dieser Geraden. Man sieht auch, dass (9) den allgemeinsten Ausdruck für eine ∞^2-Schar von Geraden im Raume ist.

Aus (3) folgt dann, dass:

$$(10) \qquad \frac{dx_i}{dt} = a_i(u, v) = \lambda(x_1, x_2, x_3) \, . \, X_i(x_1, x_2, x_3);$$

$$i = 1, 2, 3$$

fist, also:

$$X_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{a_i(u, v)}{\lambda(x_1, x_2, x_3)}; \quad i = 1, 2, 3 \tag{10'}$$

ist. Indem wir aus den drei Gleichungen (9) u, v, τ eliminieren, d. h. als Funktionen von x_1, x_2, x_3 darstellen:

$$u = f(x_1, x_2, x_3), \; v = \varphi(x_1, x_2, x_3), \; \tau = \chi(x_1 \, x_2 \, x_3) \tag{11}$$

und in (10′) einsetzen, erhalten wir den allgemeinsten Ausdruck ür unser Kraftfeld:

$$X_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{a_i[f(x_1, x_2, x_3), \; \varphi(x_1, x_2, x_3)]}{\lambda(x_1, x_2, x_3)} \tag{12}$$

Да проблемы таўтахроны.

Ц. Бурстын.

Вядома, што пэрыод ваганьня матэматычнага вагальніка залежыць ад амплітуды ваганьня. Гюйгэнс, выходзячы з спробаў, якія павінны былі прывесьці да пабудовы дакладнага гадзіньніка, знайшоў траекторыю руху, на якой пэрыод ваганьня не залежыць ад месца крывой, з якога матэрыяльны пункт пачынае свой рух. Траекторыі з гэтай уласьцівасьцю называюцца таўтахронамі. Як прыклад плоскай траекторыі - таўтахроны Гюйгэнс знайшоў цыклёіду. Матэматык Абэль паказаў пазьней, што цыклёіда зьяўляецца адзінай плоскай таўтахронай.

Мы пакажам у нашай кароткай працы, што існуе бесканечнасьць прасторавых таўтахрон, дзеля чаго мы дамо просты—магчыма сказаць—трывіальны прынцып пабудовы прасторавых таўтахрон. Наш прынцып пабудовы магчыма таксама перанесьці на цэлую клясу падобных проблемаў. Урэшце мы пакажам, што на ўсякай паверхні ёсьць бесканечна многа прасторавых таўтахрснаў.

§ 1.

Няхай будзе дана прасторавая крывая C:

(1) $$x_i = \phi_i(s); \ i = 1, 2, 3,$$

дзе s—даўжыня дугі крывой C. Няхай па крывой C рухаецца матэрыяльны пункт ад пункту з парамэтрам $s = \alpha$. Няхай гэты рух адбываецца ў полі цяжэньня, прычым напрамак прыскарэньня зямлі g няхай супадае з адмоўным напрамкам восі $x_3 = z$. З прынцыпу захаваньня энэргіі вынікае тады,

што хуткасьць v матэрыяльнага пункту ў пункце s=s крывой (1) раўняецца:

(2) $$v = \sqrt{2g(\phi_3(\alpha) - \phi_3(s))}\ ^{1)}.$$

Значыць, час $t(\beta_\alpha)$ ваганьня ад пункту $s=\alpha$ да пункту $s=\beta_\alpha$ раўняецца:

(3) $$t(\beta_\alpha) = \int_\alpha^{\beta_\alpha} \frac{ds}{\sqrt{2g(\phi_3(\alpha) - \phi_3(s))}}\ ^{2)},$$

дзе пункт $s=\beta_\alpha$ зьяўляецца пунктам, дзеля якога хуткасьць матэрыяльнага пункту ізноў раўняецца нулю. З (2) вынікае, што $s=\beta_\alpha$ ёсьць першы пункт на нашай крывой C, дзеля якога $\alpha < \beta_\alpha$ і дзеля якога:

(4) $$\phi_3(s) = \phi_3(\beta_\alpha) = \phi_3(\alpha).$$

Яскрава на падставе прынцыпу энэргіі, што матэрыяльны пункт ня можа дасягнуць аніякага больш высокага палажэньня, чымся $h = \phi_3(\alpha)$, і што ён дасягае пункту $s=\beta_\alpha$ і потым ізноў прыходзіць да пункту $s=\alpha$ і г. д., значыцца, $(\alpha - \beta_\alpha)$ зьяўляецца яго амплітудай ваганьняў. Гюйгэнс шукае тую плоскую крывую C:

(5) $$x_1 = \phi_1(s)$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = \phi_3(s),$$

дзеля якое

(6) $$t(\beta_\alpha) = \text{const}.$$

незалежна ад α.

---

1) Прымем масу матэрыяльнага пункту за адзінку. Паводле прынцыпу захаваньня энэргіі:

$$\frac{v^2}{2} + gh = \text{const},$$ значыць:

$\frac{v^2(s)}{2} + g\phi_3(s) = \frac{v^2(\alpha)}{2} + g\phi_3(\alpha)$, а з прычыны таго, што $v(\alpha)=0$, мы атрымоўваем $v(s) = \sqrt{2g(\phi_3(\alpha) - \phi_3(s))}$.

2) Менавіта: $vdt = ds$, значыцца $dt = \frac{ds}{v}$, адкуль (3).

Х. Гюйгэнс паказаў, што цыклёіда:

$$(7)\qquad \begin{aligned} x_1 &= a(\Theta - \sin\Theta) \\ x_2 &= O \\ x_3 &= a(1 + \cos\Theta) \end{aligned}$$

мае ўласьцівасьць (6).

Вылічым ds дзеля цыклёіды (7):

$$(8)\qquad ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = 2a^2(1 - \cos\Theta)d\Theta^2 =$$

$$= 4a^2 \sin^2\frac{\Theta}{2}\, d\Theta^2;$$

значыць:

$$(9)\qquad ds = 2a\sin\frac{\Theta}{2}\, d\Theta$$

альбо

$$(9')\quad s = 4a\left(-\cos\frac{\Theta}{2} + 1\right),\ \text{значыцца},\ \Theta = 2\arccos\frac{4a - s}{4a},$$

дзе для $\Theta = O$, $s = O$.

Падставім у (7) значэньне Θ з (9'); тады атрымаем раўнаньне цыклёіды з парамэтрам s.

Для нас важна толькі атрыманьне раўнаньня координаты x_3 у парамэтрычным выглядзе.

З (7) і (9') вынікае, значыцца:

$$(10)\qquad x_3 = \frac{(s - 4a)^2}{8a}.$$

Цяпер мы ізноў бліжэй разгледзім наш інтэграл (3). З выгляду нашага інтэгралу вынікае, што яго значэньне залежыць толькі ад выгляду функцыі $\phi_3(s)$ і не залежыць зусім ад выгляду функцый $\phi_1(s)$ і $\phi_2(s)$. Адзіная ўмова, якой падпарадкаваны функцыі $\phi_1(s)$, $\phi_2(s)$, гэта ўмова, каб парамэтр s сапраўды быў даўжынёю дугі крывой C, дзеля якой

$x_3 = \frac{(s - 4a)^2}{8a}$. Значыцца, мы шукаем мноства ўсіх крывых C:

$$(11)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \phi_1(s) \\ x_2 &= \phi_2(s) \\ x_3 &= \frac{(s - 4a)^2}{8a}, \end{aligned}$$

дзеля якіх s зьяўляецца даўжынёй дугі C. Павінна быць, значыцца:

$$(12) \qquad \phi_1'(s)^2 + \phi_2'(s)^2 + \left(\frac{4a - s}{4a}\right)^2 = 1 \,.$$ [3])

Значыцца:

$$(13) \qquad \phi_1'(s)^2 + \phi_2'(s)^2 = 1 - \left(\frac{4a - s}{4a}\right)^2 = \frac{8as - s^2}{16a^2}\,.$$

Мы бачым, значыцца, што мы можам выбраць адвольна $\phi_2'(s)$ (павінна толькі быць здаволена ўмова $0 < \frac{8as - s^2}{16a^2} - \phi_2'(s)^2$ дзеля пэўнага інтэрвалу, каб наша крывая C была рэчаісная), і мы атрымаем нашу функцыю $\phi_1(s)$ [3]). Значыцца, ёсьць бесканечна многа разьвязкаў проблемы Гюйгэнса дзеля $x_3 = \frac{(s - 4a)^2}{8a}$. Калі мы спэцыяльна выбярэм $x_2 = \text{const.}$, значыцца плоскі рух, тады з (13) вынікае:

$$(14) \qquad \phi_1'(s)^2 = \frac{8as - s^2}{16a^2}\,,$$

г. зн. тады $\phi_1(s)$ азначана (акрамя сталай) і роўна нашай функцыі $x_1 = a(\Theta - \sin\Theta)$ (7), значыцца, гэта наша цыклёіда [4]).

Гэты прынцып пабудовы, прадстаўлены ў нашым прыкладзе, дае нам магчымасьць знайсьці з кожнага асобнага разьвязку проблемы (3) бесканечна многа іншых разьвязкаў—крывых у прасторы.

---

[3]) Калі мы возьмем, прыкладам, $\phi_2(s) = \frac{\sqrt{7a}}{6a} s^{1^1/_2}$, тады $\phi_1'(s)^2 = \frac{as - s^2}{16a^2}$ і $\phi_1'(s) = \frac{\sqrt{as - s^2}}{4a}$; інтэгруючы, атрымаем:

$$\phi_1(s) = \frac{1}{4a}\int_0^s \sqrt{as - s^2}\, ds = \frac{2s - a}{16a^2}\sqrt{as - s^2} + \frac{a}{32} \arc\sin \frac{2s - a}{a}\,.$$

[4]) Гэта вынікае таксама з наступнага разважаньня: з (14) вынікае, што $\phi_1(s)$ азначана, акрамя сталага складніка. Але (7) зьяўляецца разьвязкам нашае проблемы, дзеля якога $x_3 = \frac{(s - 4a)^2}{8a}$, значыцца, $\phi_1(s)$ можа адрозьнівацца ад функцыі $x_1 = a(\Theta - \sin\Theta)$ (7) толькі на сталую.

Абэль паказаў, што ёсьць адна і толькі адна плоская таўтахрона [5]). Значыцца, шляхам нашага мэтоду (11), (12), (13) атрымоўваюцца ўсе таўтахроны.

Магчыма прыстасаваць наш мэтод пабудовы да цэлай клясы падобных проблем (інтэгралаў (3)). Гэтак, прыкладам, дзеля Абэлевых інтэгральных раўнаньняў тыпу:

$$(16) \qquad \int_{\alpha}^{\beta_\alpha} \frac{ds}{[\varphi_3(\alpha) - \varphi_3(s)]^{\lambda}} = t\,(\beta_\alpha),$$

дзе $0 < \lambda < 1$, і дзе $t(\beta_\alpha)$ зададзеная функцыя: знайшоўшы разьвязак $\varphi_3(s)$ нашае задачы (16) [6]), атрымоўваем бесканечна многа разьвязкаў проблемы (16) мэтодам (11), (12), (13). Значыцца, ёсьць таксама ў полі (16) бесканечна многа крывых, якія разьвязваюць проблему (16).

Наогул магчыма прыстасаваць наш мэтод пабудовы да ўсіх проблем тыпу:

$$(17) \qquad \int_{\alpha}^{\beta_\alpha} \frac{ds}{\Phi(\varphi_3(s), \varphi_3(\alpha))} = t\,(\beta_\alpha),$$

дзе $\Phi(x, y)$ і $t(x)$ зададзеныя функцыі. Калі, значыцца, ведаем адзін разьвязак (17), тады можам знайсьці бесканечна многа траекторыяў шляхам мэтоду (11), (12), (13), якія разьвязваюць нашу проблему.

§ 2.

Цяпер мы пакажам, што на кожнай паверхні ёсьць бесканечна многа таўтахрон. Няхай цяпер будзе:

$$(18) \qquad x_i = x_i(u, v); \quad i = 1, 2, 3,$$

раўнаньне некаторай паверхні F_2 у нашай эўклідавай прасторы.

[5]) Глядзі: G. Kowalewski: Integralgleichungen. Einführung, § 1.; Göschens Lehrbücherei, Bd 18.

[6]) Глядзі зноску [5]). Абэль паказаў, што раўнаньне (16) мае толькі адзін разьвязак.

Каб гэта давесьці, увядзем наступныя парамэтрычныя пэратварэньні. Няхай будуць s, t новыя парамэтры, якія мы выбіраем наступным чынам:

(19) $$x_3(u, v) = \frac{(s-4a)^2}{8a}\ ^{7)}.$$

З (19) мы можам вылічыць u; няхай будзе:

(20) $$u = \phi(s, v).$$

Цяпер мы падстаўляем у (18) значэньне (20) u, і атрымоўваем:

(21) $$\begin{cases} x_1 = x_1(\phi(s, v), v) = f_1(s, v) \\ x_2 = x_2(\phi(s, v), v) = f_2(s, v) \\ x_3 = x_3(u, v) = \dfrac{(s-4a)^2}{8a}\ ^{8)}. \end{cases}$$

Цяпер мы ўвядзем дзеля v новае пэратварэньне:

(22) $$v = \psi(s, t),$$

дзе $\psi(s, t)$ павінна быць функцыяй, якую мы бліжэй азначым пазьней. Падстаўляючы за v значэньне (22) у (21), мы атрымаем:

(23) $$x_1 = f_1(s, \psi(s, t))$$
$$x_2 = f_2(s, \psi(s, t))$$
$$x_3 = \frac{(s-4a)^2}{8a}.$$

Цяпер мы выбярэм функцыю $\psi(s, t)$ так, каб парамэтр s зьяўляўся даўжынёй дугі дзеля ўсіх крывых $t = const$ на нашай паверхні (18), (23). Значыцца, павінна быць:

(24) $$\left(\frac{\partial x_1}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial s}\right)^2 = 1.$$

Калі мы выбярэм гэткім чынам функцыю $\psi(s, t)$, тады, як мы бачылі, у выніку (10), (11), (12), (13) крывыя $t = const$ зьяўляюцца ўсе таўтахронамі.

Цяпер мы пакажам, што сапраўды існуюць гэткія функцыі $\psi(s, t)$. На самай справе, з (24) вынікае, калі ўлічыць (23):

(25) $$\left(\frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial s} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial s}\right)^2 + \frac{(s-4a)^2}{16a^2} = 1.$$

---

[7]) Функцыя (19) тады ідэнтычна з функцыяй (10).

[8]) Значыцца, функцыя (20) дана адназначна, значыцца, таксама і функцыі $f_1(s, v)$, $f_2(s, v)$.

(25) зьяўляецца дыфэрэнцыяльным раўнаньнем першага парадку з часьціннымі вываднымі адносна ψ (s, t). З тэорыі раўнаньняў з часьціннымі вываднымі мы ведаем, што (25) мае разьвязкі адносна ψ (s, t) [9]).

Трэба толькі выбраць з (25) рэчаісныя разьвязкі, калі мы хочам знайсьці рэчаісныя таўтахроны на нашай паверхні (18). Дзеля гэтага павінна быць дзеля нейкага абсягу (s, v):

$$(26) \qquad \left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)^2 + \frac{(s-4a)^2}{16a^2} > 1.$$

Калі ўмова (26) задаволена, тады існуе бесканечна многа (моцнасьці контынууму) таўтахрон на нашай паверхні.

Усе паверхні (18), якія здавальняюць у пэўным абсягу (s, t) няроўнасьць (26), маюць бесканечна многа таўтахрон.

Мы разгледзім яшчэ больш дакладна гэтую ўмову. З (18), (19), (20), (21) вынікае, што:

$$(27) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial s} = \frac{\partial x_i(\phi(s,v),v)}{\partial s} = \frac{\partial x_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial s}; \ (i=1,2).$$

Але з прычыны таго, што ў выніку (19):

$$(27') \qquad \frac{\partial x_3}{\partial u} du + \frac{\partial x_3}{\partial v} dv - \frac{s-4a}{4a} ds = O,$$

значыцца, з (27') вынікае:

$$(27'') \qquad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{s-4a}{4a \cdot \dfrac{\partial x_3}{\partial u}}.$$

Значыцца, мы маем:

$$(27) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial s} = \frac{\partial x_i}{\partial u} \cdot \frac{s-4a}{4a \cdot \dfrac{\partial x_3}{\partial u}}; \quad i = 1, 2.$$

Калі мы цяпер падставім значэньне (27) у (26), тады мы атрымаем:

$$(28) \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 : \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2 : \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)^2 + 1 > \frac{16a^2}{(s-4a)^2}.$$

Але ў выніку (19) мы маем

$$\frac{(s-4a)^2}{8a} = x_3(u, v).$$

---

[9]) Глядзі: Horn J.: Partielle Differentialgleichungen.

Згодна з гэтым мы маем, падстаўляючы (19) у (28):

$$(29)\quad \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 : \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2 : \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)^2 > \frac{2a}{x_3 (u, v)} - 1 =$$

$$= \frac{2a - x_3\,(u,\ v)}{x_3(u,\ v)},$$

альбо:

$$(29')\qquad \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2 > \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)^2 . \frac{2a - x_3\,(u, v)}{x_3\,(u, v)},$$

дзе a ёсьць адвольная дадатная велічыня.

Няхай будзе цяпер дзеля $u = O$, $v = O$:

$$(30)\ \frac{\partial x_3}{\partial u} = O.$$

Але тады ня могуць быць адначасова нулямі:

$$(30')\qquad \frac{\partial x_1\,(0, 0)}{\partial u},\ \frac{\partial x_2\,(0, 0)}{\partial u},$$

калі наш пункт $u = O$, $v = O$ не зьяўляецца асаблівым пунктам. Значыцца, дзеля пункту $u = O$, $v = O$ мы маем у выніку (30), (30'):

$$(31)\qquad \left(\frac{\partial x_1\,(0, 0)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2\,(0, 0)}{\partial u}\right)^2 > O,$$

г. зн. дзеля пункту $u = O$, $v = O$ наша няроўнасьць (у больш вузкім сэнсе) задаволена. З прычыны таго, што мы прадпалагалі нашы функцыі $x_i\,(u, v)$ аналітычнымі, існуе ў выніку (31) некаторы абсяг (u, v) на нашай паверхні (18), дзеля якога ўмова (29') выпаўнена. Значыцца, на нашай паверхні (18) ёсьць бесканечна многа таўтахрон, менавіта крывыя, дзеля якіх $t = \text{const}$, калі задаволены ўмовы (30), (30'). Але ўмовы (30), (30') выказваюць толькі тое, што ў пункце $u = O$, $v = O$ датычная роўніца да паверхні (18) паралельна да роўніцы $(x_1\, x_2)$, а гэтая ўмова па сутнасьці не азначае аніякага абмежаваньня выгляду паверхні, а толькі яе палажэньня ў прасторы. Значыцца, мы можам выказаць тэорэму:

Тэорэма: *Усякая аналітычная паверхня мае мноства моцнасьці контынууму таўтахронаў.*

Ein Beitrag zum Tautochronenproblem.

Von C. Burstin.

Die Schwingungsperiode eines mathematischen Pendels ist bekanntlich abhängig von der Amplitude der Schwingung. Nun hat Ch. Huygens ausgehend von den Versuchen, die zur Konstruktion einer exakten Uhr führen sollten, eine Bahnkurve gefunden, auf welcher die Periode einer Schwingung unabhängig von der Stelle der Kurve ist, von welcher ein materieller Punkt seine Bewegung anfängt. Bahnkurven dieser Eigenschaft nennt man Tautochronen. Als Beispiel einer ebenen Bahnkurve-Tautochrone hat Huygens die Zykloide gefunden. Der Mathematiker Abel hat dann gezeigt, dass die Zykloide die einzige ebene Tautochrone ist.

Wir wollen in unserer kurzen Note zeigen, dass es ∞ - viele räumliche Tautochronen gibt, indem wir ein einfaches — man kann sagen — ein triviales Konstruktionsprinzip der räumlichen Tautochronen angeben. Unser Konstruktionsprinzip kann man auch auf eine ganze Klasse von ähnlichen Problemen übertragen. Zum Schluss zeigen wir, dass es auf jeder Fläche unendlich viele räumliche Tautochronen gibt.

§ 1.

Es sei gegeben eine räumliche Kurve C:

$$(1) \qquad x_i = \varphi_i(s) \qquad i = 1, 2, 3$$

wobei s die Bogenlänge der Kurve C ist. Auf der Kurve C bewege sich ein materieller Punkt von einem Punkt mit dem Parameter $s = \alpha$ aus, Die Bewegung finde in dem Schwerfeld statt, wobei die Richtung der Erdbeschleunigung g mit der negativen Richtung der $x_3 = z$ (Axe) zusammenfällt. Aus dem Prinzip der Erhaltung der Energie folgt dann, dass die

Geschwindigkeit v des materiellen Punktes im Punkte s = s der Kurve (1) gleich ist

(2) $$v = \sqrt{2\,g[\varphi_3(\alpha) - \varphi_3(s)]}$$ [1])

Es ist also die Zeit $t(\beta_\alpha)$ der Schwingung von dem Punkte $s = \alpha$ bis zum Punkte $s = \beta_\alpha$ gleich:

(3) $$t(\beta_\alpha) = \int_\alpha^{\beta_\alpha} \frac{ds}{\sqrt{2\,g[\varphi_3(s) - \varphi_3(s)]}}$$ [2])

wobei der Punkt $s = \beta_\alpha$ ein Punkt ist, für welchen die Geschwindigkeit des materiellen Punktes wieder gleich Null ist. Aus (2) folgt aber, dass $s = \beta_\alpha$ der erste Punkt auf unserer Kurve C ist, für welchen $\beta_\alpha > \alpha$ ist und für welchen

(4) $$\varphi_3(s) = \varphi_3(\beta_\alpha) = \varphi_3(\alpha)$$

ist. Es ist klar auf Grund des Energieprinzips, dass der materielle Punkt keine höhere Lage als $h = \varphi_3(\alpha)$ erreichen kann, und dass er den Punkt $s = \beta_\alpha$ erreicht und dann wieder zum Punkt $s = \alpha$ ankommt u. s. f., es ist also $(\alpha - \beta_\alpha)$ seine Schwingungsbreite. Nun sucht Ch. Huygens jene ebene Kurve C:

(5) $$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(s) \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \varphi_3(s) \end{cases}$$

---

[1]) Die Masse des materiellen Punktes setzen wir gleich Eins an. Es ist nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie

$$\frac{v^2}{2} + gh = \text{konst.}\ \text{ also}$$

$$\frac{v^2(s)}{2} + g\varphi_3(s) = \frac{v^2(\alpha)}{2} + g\varphi_3\alpha$$ und da $v(\alpha) = 0$ ist, erhalten wir $v(s) = \sqrt{2g[\varphi_3(\alpha) - \varphi_3(s)]}$

[2]) Es ist nämlich:

$$vdt = ds,\ \text{also}\ dt = \frac{ds}{v},\ \text{ demnach}$$

$$t(\beta\alpha) = \int_\alpha^{\beta\alpha} \frac{ds}{\sqrt{2g[\varphi_3(\alpha) - \varphi_3(s)]}}$$

für welche

$$(6) \qquad t(\beta_\alpha) = \text{const.}$$

von α unabhängig ist.

Ch. Huygens hat gezeigt, dass die Zykloide:

$$(7) \qquad \begin{cases} x_1 = a(\Theta - \sin\Theta) \\ x_2 = 0 \\ x_3 = a(1 + \cos\Theta) \end{cases}$$

die Eigenschaft (6) besitzt.

Berechnen wir ds für die Zykloide (7)

$$(8) \qquad \begin{cases} ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \\ \quad = 2a^2(1 - \cos\Theta)\,d\Theta^2 = 4a^2 \sin^2\frac{\Theta}{2}\,d\Theta^2 \end{cases}$$

also:

$$(9') \qquad ds = 2a \sin\frac{\Theta}{2} d\Theta$$

oder

$$(9') \qquad s = 4a\left(-\cos\frac{\Theta}{2} + 1\right), \text{ also } \Theta = 2 \arccos\frac{4a - s}{4a}$$

wobei für $\Theta = 0$, $s = 0$ ist.

Setzen wir für Θ den Wert aus (9') in (7) ein, dann erhalten wir die Gleichung der Zykloide für den Parameter s.

Für uns ist von Wichtigkeit nur die Koordinatengleichung x_3 im Parametergestalt zu erhalten.

Aus (7) und (9') folgt also:

$$(10) \qquad x_3 = \frac{(s - 4a)^2}{8a}.$$

Jetzt wollen wir wieder unser Integral (3) näher betrachten. Aus dem Gestalt unseres Integrals folgt, dass sein Wert nur von dem Gestalt der Funktion $\varphi_3(s)$ abhängt und ganz und gar von der Form der Funktionen $\varphi_1(s)$ und $\varphi_2(s)$ unabhängig ist. Die einzige Bedingung, welcher die Funktionen $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$ unterworfen sind, ist die Bedingung, dass der Parameter s wirklich die Bogenlänge der gesuchten Kurve C ist, für welche $x_3 = \frac{(s-4a)^2}{8a}$ ist.

Wir suchen demnach die Gesamtheit der Kurven C:

$$(11) \qquad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(s) \\ x_2 = \varphi_2(s) \\ x_3 = \frac{(s - 4a)^2}{8a}, \end{cases}$$

für welche s die Bogenlänge von C ist. Es muss also:

$$\varphi_1'(s)^2 + \varphi_2'(s)^2 + \left(\frac{4a-s}{4a}\right)^2 = 1 \tag{12}$$

sein [3]). Es ist also:

$$\varphi_1'(s)^2 + \varphi_2'(s)^2 = 1 - \left(\frac{4a-s}{4a}\right)^2 = \frac{8as - s^2}{16a^2}. \tag{13}$$

Wir sehen also, dass wir $\varphi_2'(s)$ willkürlich wählen können (es muss nur die Bedingung $\frac{8as - s^2}{16a^2} - \varphi_2'(s)^2 > 0$ für ein gewisses Interwall erfüllt sein, damit unsere Kurve C reell ist), und erhalten wir unsere Funktion $\varphi_1(s)$ [3]). Es gibt also unendlich viele Lösungen des Huygens'schen Problems für $x_3 = \frac{(s-4a)^2}{8a}$. Wählen wir speziell $x_2 = \text{konst.}$, also eine ebene Bewegung, dann folgt aus (13):

$$\varphi_1'(s)^2 = \frac{8as - s^2}{16a^2}, \tag{14}$$

d. h. $\varphi_1(s)$ ist dann bis auf eine Konstante bestimmt und gleich unserer Funktion $x_1 = a(\Theta - \sin\Theta)$ (7), es ist also unsere Zykloide [4]).

Dieses, an unserem Beispiel, geschilderte Konstruktionsprinzip gibt uns die Möglichkeit aus jeder einzelnen Lösung des Problems (3), unendlich viele andere Lösungen — Kurven im Raume zu finden.

---

[3]) Nehmen wir z. B. $\varphi_2(s) = \frac{\sqrt{7a}\, s^{3/2}}{6a}$, dann ist $\varphi_1'(s)^2 = \frac{as - s^2}{16a^2}$

$$\text{und } \varphi_1'(s) = \frac{\sqrt{as - s^2}}{4a};$$

indem wir integrieren, erhalten wir

$$\varphi_1(s) = \frac{1}{4a}\int_0^s \sqrt{as - s^2}\, ds = \frac{2s-a}{16a^2}\sqrt{as - s^2} + \frac{a}{32}\arcsin\frac{2s-a}{a}.$$

[4]) Dies folgt auch aus der folgenden Überlegung: Aus (14) folgt, dass $\varphi(s)$ bis auf eine Konstante bestimmt ist. Nun ist aber (7) eine Lösung unseres Problems, für welche $x_3 = \frac{(s-4a)^2}{8a}$, es muss also $\varphi_1(s)$ bis auf eine Konstante der Funktion $x_1 = a(\Theta - \sin\Theta)$ (7) gleich sein.

Nun hat Abel gezeigt, dass es eine und nur eine ebene Tautochrone gibt [5]). Man erhält also durch unser Verfahren (11), (12), (13) die Gesammtheit der Tautochronen.

Man kann unser Konstruktionsverfahren auf eine ganze Klasse von ähnlichen Problemen (Integralen (3) anwenden. So zum Beispiel für Abel'sche Integralgleichungen [5]) vom Typus:

$$(16) \qquad \int_{\alpha}^{\beta_\alpha} \frac{ds}{[\varphi_3(\alpha) - \varphi_3(s)]^\lambda} = t(\beta_\alpha)$$

wobei $0 < \lambda < 1$ ist, und wo $t(\beta_\alpha)$ eine vorgegebene Funktion ist. Indem man eine Lösung $\varphi_3(s)$ unserer Aufgabe (16) findet [6]), bekommt man unendlich viele Lösungen des Problems (16) durch das Verfahren (11), (12), (13). Es gibt also auch im Falle (16) unendlich viele Kurven, welche das Problem (16) lösen.

Allgemein kann man unser Konstruktionsverfahren auf alle Probleme des Typus:

$$(17) \qquad \int_{\alpha}^{\beta_\alpha} \frac{d\,s}{\Phi[\varphi_3(s), \varphi_3(\alpha)]} = t(\beta_\alpha)$$

anwenden, wo $\Phi(x, y)$ und $t(x)$ vorgegebene Funktionen sind. Kennt man also eine Lösung von (17), dann kann man ∞ viele Bahnkurven mittels des Verfahrens (11), (12), (13) finden, welche unser Problem lösen.

§ 2.

Nun wollen wir zeigen, dass es auf jeder Fläche unendlich viele Tautochronen gibt. Es sei nun:

$$(18) \qquad x_i = x_i(u, v); \qquad i = 1, 2, 3$$

die Gleichung einer Fläche F_2 im unseren euklidischen Raum.

---

[5]) Siehe: G. Kowalewski: Integralgleichungen. Einführung § 1. Göschens Lehrbücherei, Bd. 18.

[6]) Siehe Fussnote [5]). Abel hat gezeigt, dass die Gleichung (16) eine einzige Lösung besitzt.

Um das zu zeigen, führen wir folgende Parametertransformationen ein. Es seien s, t neue Parameter, die wir wie folgt wählen:

$$(19) \qquad x_3(u, v) = \frac{(s-4a)^2}{8a} \quad {}^{7)}.$$

Aus (19) können wir u berechnen; es sei nun

$$(20) \qquad u = \varphi(s, v)$$

Wir setzen nun für u (20) den Wert in (18) ein und erhalten dann:

$$(21) \qquad \left| \begin{aligned} x_1 &= x_1[\varphi(s, v), v] = f_1(s, v) \\ x_2 &= x_2[\varphi(s, v), v] = f_2(s, v) \\ x_3 &= x_3(u, v) = \frac{(s-4a)^2}{8a}. \end{aligned} \right. \quad {}^{8)}$$

Jetzt führen wir für v eine neue Transformation ein:

$$(22) \qquad v = \psi(s, t),$$

wobei $\psi(s, t)$ eine Funktion sein soll, die wir noch näher bestimmen wollen. Indem wir für v den Wert (22) in (21) einsetzen, erhalten wir:

$$(23) \qquad \left. \begin{aligned} x_1 &= f_1[s, \psi(s, t)] \\ x_2 &= f_2[s, \psi(s, t)] \\ x_3 &= \frac{(s-4a)^2}{8a} \end{aligned} \right\} ,$$

Nun wählen wir die Funktion $\psi(s, t)$ so, dass der Parameter s für alle Kurven $t = const$ auf unserer Fläche (18), (23) die Bogenlänge ist. Es muss also:

$$(24) \qquad \left(\frac{\partial x_1}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial s}\right)^2 = 1$$

sein. Haben wir also auf diese Weise die Funktion $\psi(s, t)$ gewählt, dann sind zufolge (10), (11), (12), (13), wie wir gesehen haben, die Kurven $t = konst.$ alle Tautochronen.

Nun wollen wir zeigen, dass es wirklich solche Funktionen $\psi(s, t)$ gibt. In der Tat, folgt aus (24), indem man (23) berücksichtigt:

$$(25) \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial \psi}{d s}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial s} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial s}\right)^2 + \frac{(s-4a)^2}{16a^2} = 1.$$

---

7) Die Funktion (19) ist also mit der Funktion (10) identisch.

8) Es ist also die Funktion (20) eindeutig gegeben, demnach auch die Funktionen $f_1(s, v)$, $f_2(s, v)$.

Nun ist (25) eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in $\psi(s, t)$. Aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen wissen wir, dass (25) Lösungen $\psi(s, t)$ besitzt [9]). Man muss nur aus (25) reelle Lösungen $\psi(s, t)$ wählen, wenn man reelle Tautochronen auf unserer Fläche (18) finden will. Es muss demnach:

$$(26) \qquad \left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial s}\right)^2 + \frac{(s-4a)^2}{16a^2} \geqq 1$$

für einen gewissen Bereich (s, v) sein. Ist die Bedingung (26) erfüllt, dann gibt es unendlich viele (kontinuierlich viele) Tautochronen auf unserer Fläche.

Alle Flächcn (18), welche in einem gewissen Bereich (s, t) die Ungleichung (26) erfüllen, haben unendlich viele Tautochronen.

Wir wollen noch die Bedingung genauer discutieren. Nun folgt aus (18), (19), (20), (21), dass:

$$(27) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial s} = \frac{\partial x_i\,[\varphi(s,v), v]}{\partial s} = \frac{\partial x_i}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial s}; \quad (i=1,\, 2) \text{ ist.}$$

Da aber zufolge (19):

$$(27') \qquad \frac{\partial x_3}{\partial u}\,du + \frac{\partial x_3}{\partial v}\,dv - \frac{s-4a}{4a}\,ds = 0$$

ist, so folgt aus (27'):

$$(27'') \qquad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{s-4a}{4a\cdot\dfrac{\partial x_3}{\partial u}}\,.$$

Es ist also:

$$(27) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial s} = \frac{\partial x_i}{\partial u}\cdot\frac{s-4a}{4a\cdot\dfrac{\partial x_3}{\partial u}} \qquad i = 1,\ 2.$$

Setzen wir nun den Wert (27) in (26) ein, so erhalten wir:

$$(28) \quad \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 : \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2 : \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)^2 + 1 > \frac{16a^2}{(s-4a)^2}$$

Nun ist aber zufolge (19) $\dfrac{(s-4a)^2}{8a} = x_3(u, v)$.

---

9) Siehe: Horn J.: Partielle Differentialgleichungen.

Es ist demnach, indem wir (19) in (28) einsetzen:

$$(29)\quad \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 : \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2 : \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)^2 \geqq \frac{2a}{x_3(u,v)} - 1 = \frac{2a - x_3(u,v)}{x_3(u,v)}$$

oder

$$(29')\quad \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2 \geqslant \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)^2 \cdot \frac{2a - x_3(u,v)}{x_3(u,v)},$$

wobei a eine beliebige positive Grösse ist.

Es sei nun für $u = o$, $v = o$:

$$(30)\quad \frac{\partial x_3}{\partial u} = 0.$$

Nun können aber

$$(30')\quad \frac{\partial x_1(0,0)}{\partial u},\ \frac{\partial x_2(0,0)}{\partial u}$$

nicht zugleich dann Null sein, wenn unser Punkt $u = 0$, $v = 0$ nicht singulär ist. Es ist also für den Punkt $u=0$, $v=0$, zufolge (30), (30′):

$$(31)\quad \left(\frac{\partial x_1(0,0)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(0,0)}{\partial u}\right)^2 > 0,$$

d. h. für den Punkt $u = 0$, $v = 0$ ist unsere Ungleichung (im engeren Sinne) erfüllt. Da unsere Funktionen $x_i(u, v)$ analytisch vorausgesetzt wurden, so gibt es zufolge (31) eine gewisse Umgebung (u, v) auf unserer Fläche (18), für welche die Bedingung (29′) erfüllt ist. Es gibt also auf unserer Fläche (18) unendlich viele Tautochronen, nämlich Kurven, für welche $t=$konst. ist, wenn die Bedingungen (30), (30′) erfüllt sind. Nun besagen die Bedingungen (30), (30′) nur das aus, dass im Punkt $u=0$, $v=0$ die Tangentialebene der Fläche (18) parallel zur Ebene $(x_1\, x_2)$ ist, eine Bedingung, die im Grunde genommen keine Einschränkung der Gestalt einer Fläche, und nur ihrer Lage im Raum, bedeutet. Wir können also den Satz aussprechen:

Satz: *Jede analytische Fläche hat kontinuierlich viele Tautochronen.*

Аб працы А. Круталевіча ў № 17-18 „Прац Б.Дз.У“.

Ц. Бурстын у Менску.

Перш чым прыступіць да крытыкі працы А. Круталевіча „Разьвязаньне лікавых раўнаньняў спосабам дэдукцыйнай ітэрацыі“, мы коратка дамо тэорытычнае абгрунтаваньне мэтоду ітэрацыі для знаходжаньня прыбліжэньняў кораняў. Кароткі нарыс гэтай тэорыі магчыма знайсьці ў „Numerisches Rechnen“ К. Рунгэ, § 51, і „Methoden der praktischen Analysis“ F. A. Willers'a, § 18.

Калі дана раўнаньне $f(x) = O$, тады мы можам бесканечным мноствам спосабаў напісаць яго ў роўнасільнай форме:

$$x = \varphi(x) \qquad (1)$$

Заўвага: Магчыма прывесьці ўсякае раўнаньне $f(x) = O$ да выгляду:

$$x = \sqrt[n]{\varphi(x) \cdot f(x) + x^n} \qquad (1')$$

прычым n ёсьць адвольны цэлы лік, а $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$ ёсьць адвольная цэлая функцыя. Форма (1') залежыць, значыцца, ад бясконца шматлікіх парамэтраў n, $a_0, a_1, \ldots, a_m, \ldots$ Таму зьяўляецца няясным і ўводзячым у заблуджэньне, калі аўтар у пачатку § 3 свае працы піша:

„Кожнае раўнаньне, прыведзенае да выгляду

$$x = \varphi(a, x),$$

дзе a ёсьць якая-небудзь сталая велічыня, можа быць прадстаўлена і гэтак:

$$x = \varphi[a, \varphi(a, x)]$$

або далей так:

$$x = \varphi\{a, \varphi[a, \varphi(a, \ldots)]\} \quad \ldots“.$$

Гэткім чынам можа ўзьнікнуць у чытача думка, быццам даная аўтарам форма $x = \phi(x, a)$ якім-небудзь чынам характэрна дзеля мэтоду ітэрацыі, што, бязумоўна, няправільна.

Няхай будзе x_1 якое-небудзь рэчаіснае значэньне, тады ўтворым пасьлядоўнасьць $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, дзе:

$$x_{k+1} = \phi(x_k); \ (k = 1, 2, \ldots, n, \ldots) \qquad (2)$$

і запытаемся, калі гэтая пасьлядоўнасьць $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ будзе зьбежная, а калі разьбежная.

Няхай будзе x' корань раўнаньня $f(x) = O$, тады:

$$x' = \phi(x'). \qquad (3)$$

З (2) і (3) вынікае:

$$x_{k+1} - x' = \phi(x_k) - \phi(x') = (x_k - x')\,\phi'(\xi_k), \qquad (4)$$

дзе ξ_k ляжыць між x_k і x'.

Першы выпадак. Няхай будзе ў прамежку ад x_1 да x':

$$|\phi'(x)| \leq m < 1 \qquad (4');$$

тады з (4) вынікае, што:

$$|x_2 - x'| \leq m\,|x_1 - x'|;\ |x_3 - x'| < m\,|x_2 - x'| \leq$$
$$\leq m^2\,|x_1 - x'|, \qquad (5)$$

альбо агульна:

$$|x_k - x'| \leq m^{k-1}\,|x_1 - x'|. \qquad (6)$$

Значыць, з (6) вынікае:

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x', \qquad (7)$$

г. зн. пасьлядоўнасьць x_k у гэтым выпадку зьбежна да x', значыць, яна сапраўды зьяўляецца пасьлядоўнасьцю прыблізных значэньняў кораню x'.

Другі выпадак. Калі:

$$|\phi'(x)| \geq M > 1 \qquad (8)$$

у прамежку ад x_1 да x', тады гэткім самым чынам, як папярэдняе, вынікае, што пасьлядоўнасьць x_k разьбежна, значыць не зьяўляецца ніякай пасьлядоўнасьцю прыблізных значэньняў кораню x'.

Мы бачым, значыць, што дзеля прыстасаваньня мэтоду ітэрацыі мае істотнае значэньне, як сябе вядзе функцыя $|\phi'(x)|$ *у атачэньні кораню, які мы маем дасьледваць.*

У абодвух выпадках (4), (8) паводзіны функцыі $|\phi'(x)|$ даюць нам крытэрыум таго, ці ітэрацыйная пасьлядоўнасьць

зьбежна, ці яна разьбежна. Мы можам, значыць, толькі тады прыстасоўваць наш мэтод, калі $|\varphi'(x)| < 1$ у нашым інтэрвале, але ніколі тады, калі $|\varphi'(x)| > 1$ у нашым інтэрвале [1]). Калі дзеля нашага кораню х': $|\varphi'(x')| = 1$, тады немагчыма на падставе гэтых агульных развражаньняў выказаць што-небудзь азначанае аб нашай ітэрацыйнай пасьлядоўнасьці, і лепш у гэтым выпадку не прыстасоўваць мэтоду ітэрацыі. *Далей, з папярэдняга вынікае, што выбар пачатковага значэньня x_1 мае істотнае значэньне дзеля прыстасавальнасьці мэтоду ітэрацыі (дзеля доваду зьбежнасьці ітэрацыйнай пасьлядоўнасьці), і што немагчыма абыйсьціся бяз выбару, бо інакш можа ітэрацыйная пасьлядоўнасьць ня быць зьбежнай. Мы павінны, значыць, пры выбары пачатковага значэньня x_1 кіравацца прынцыпам, каб па-першае ў пэўным атачэньні значэньня x_1 было $|\varphi'(x)| < 1$, і па-другое, каб у гэтым атачэньні ляжаў хаця адзін корань раўнаньня.*

Гэтага ня бачыць і не падкрэсьлівацъ, наадварот, зацьвярджаць адваротнае:

(§ 5) „Заключэньне. Як бачым, з пункту погляду *мэтодолёгічнага* мэтод дэдукцыйны ітэрацыі валадае некаторымі плюсамі, якія заключаюцца ў поўнай дэдукцыйнасьці ..... у неабавязковасьці аддзяленьня разьвязкаў“...
— зьяўляецца вялікай памылкай аўтара. Уся, між іншым, не арыгінальная праца (мэтод ітэрацыі прыстасоўваўся Рунгэ, Кэнігам, Вільлерсам і давалася імі яго строгае абгрунтаваньне) зьяўляецца дзеля гэтага матэматычна цалкам няпрыгоднай.

Пасьля гэтых кароткіх заўваг мы разгледзім бліжэй працу Круталевіча.

1) Аўтар называе свой мэтод дэдукцыйнай ітэрацыяй. Аснову дзеля гэтага ён дае ў сваім § 3:

„ён не вымагае ніякіх іншых опэрацый апрача чыстай ітэрацыі“.

---

[1]) Калі ў развражаемым інтэрвале $|\varphi'(x)| > 1$, тады магчыма ўзяць адваротную фунцыю $\psi(x)$ да функцыі $\varphi(x)$, тады мы атрымоўваем адваротную суадносіну $x=\psi(y)$. Дзеля гэтай функцыі $|\psi'(y)| = \frac{1}{|\varphi'(x)|} < 1$, г. зн. мы цяпер можам атрымаць корань x' ітэрацыйным процэсам.

Значыць, толькі ў выпадку, калі $|\varphi'(x')| = 1$, немагчыма прыстасоўваць мэтод ітэрацыі. У кожным выпадку, аднак, важна гэтак выбраць пачатковае значэньне x_1, каб у прамежку $(x' - x_1)$ было $|\varphi'(x)| < 1$.

„Ясна, што першым прыбліжэньнем аднаго з рэчаістых разьвязкаў будзе:

$$x_1 = \sqrt[n]{a_n + a_{n-1}\sqrt[n]{a_n} + a_{n-2}\sqrt[n]{a_n^2} + \ldots + a_1\sqrt[n]{a_n^{n-1}}} \text{ “} \qquad (9)$$

„Лёгка відаць, што калі толькі лік рэчаістых разьвязкаў, напр. k, менш за ступень раўнаньня, то пэўныя k опэрацый дадуць нам k рэчаістых разьвязкаў, а пазасталыя дадуць нам некаторыя з знойдзеных раней значэньняў. Гэта пакажа, што пазасталыя разьвязкі—уяўныя“.

Першае зацьверджаньне аўтара, быццам прыбліжэньне, якое атрымоўваецца, цалкам незалежна ад першага прыбліжэньня, а залежыць толькі ад процэсу ітэрацыі, няправільна, як мы ўжо заўважылі.

На справе няправільнасьць гэтага зацьверджаньня вынікае з (4') і (8). Магчыма гэта паказаць таксама на простым прыкладзе:

$$x = x^3 + 6 \qquad (10)$$

Заўвага: Гэткую ітэрацыю аўтар прыстасоўвае да свайго прыкладу:

$$x = \frac{1}{5} + \frac{x^5}{5} \text{ (старонка 201).}$$

Дзеля $x_1 = 6$ атрымоўваецца $x_2 = -210$, $x_3 = 210 + 6$, $x_4 < 0$ — пасьлядоўнасьць разьбежная.

Дзеля $x_1 = 2$ атрымоўваем $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, ..., $x_n = 2$ — корань раўнаньня (10).

Гэты просты прыклад дастатковы дзеля таго, каб паказаць няправільнасьць гэтак званага чыста дэдукцыйнага мэтоду ітэрацыі.

Аўтар паказвае, аднак, правільнасьць сваіх зацьверджаньняў, якія, як мы ўжо некалькі разоў бачылі, няправільны, на розных прыкладах.

Правільнасьць гэтак званага „дэдукцыйнага мэтоду ітэрацыі“ паказваецца эмпірычным шляхам, бяручы некалькі выбраных прыкладаў. Мы якраз выбралі іншыя прыклады, якія паказваюць няправільнасьць усяго мэтоду, *як яго аўтар прыстасоўвае і дэфініруе.* Гэта, бязумоўна, зусім ясна, бо калі агульная тэорэма няправільна, тады магчыма заўсёды знайсьці прыклады, якія паказваюць яе няправільнасьць, і гэта цалкам дастаткова дзеля доваду няправільнасьці гэтае тэорэмы.

Падбор прыкладаў ніяк ня можа давесьці правільнасьці няправільнай тэорэмы, і акрамя гэтага ўводзіць у заблуджэньне.

Аўтар на пасяджэньні навуковага таварыства пры Б.Дз.У., прысьвечаным крытыцы яго працы, рабіў спробы спаслацца на водзывы Брадзіса, Мордухай-Болтоўскага і інш. — але ніякія аўторытэты ня могуць давесьці правільнасьць няправільнае тэорэмы, нават ня гледзячы на падтрыманьне аўтара з боку старшыні сходу проф. Сіроціна.

Гэткім самым чынам мог-бы, бязумоўна, хто-небудзь давесьці правільнасьць няправільнае тэорэмы:

„Усе цэлыя лікі, якіх апошняя цыфра ёсьць 3, дзеляцца без астачы на 3“.

„Довад“: 3, 33, 63, 93, 1113, ... — некалькі прыкладаў, дзеля якіх тэорэма сапраўды правільна.

Другое зацьверджаньне, якое высоўваецца аўтарам у § 3, быццам пасьлядоўнае прыстасаваньне першай, другой і г. д. ітэрацыі дае першы, другі і г. д. рэчаісны корань раўнаньня, ня мае наогул ніякага сэнсу, бо нават аўтар дзеля свайго раўнаньня n-най ступені дае больш, чымся n, мэтодаў ітэрацыі, прыкладам, дзеля раўнаньня

$$\frac{x^5}{5} - x + \frac{1}{5} = O$$

ён прыстасоўвае акрамя 5 мэтодаў ітэрацыі (старонкі 198, 199) яшчэ шостую ітэрацыю:

$$x = \frac{1}{5} + \frac{x^5}{5} \text{ (старонка 201).}$$

(Як довад правільнасьці ён ізноў ужывае прыклад, дзе тэорэма правільна).

Няправільнасьць 2-га зацьверджаньня вынікае ўжо з няправільнасьці першага. Магчыма лёгка пабудаваць прыклады, дзе ітэрацыя, якую аўтар абазначае як першую, дае той самы корань, што і ітэрацыя, якую ён называе другой:

$$x^2 - 10x - 11 = O. \qquad (11)$$

Першы мэтод:

$$x = \sqrt{10x + 11}\ ;\ x_1 = 11,\ x_2 = 11,\ \ldots\ldots,\ x_n = 11,$$

значыць, корань $x' = 11$.

Другая ітэрацыя: $x = 10 + \frac{11}{x}$, $x_1 = 10$; $x_2 = 11{,}1$; .....;

$$x_n \to 11.$$

Ізноў корань 11.

Наш прыклад паказвае таксама няправільнасьць зацьверджаньня „лёгка відаць“ ..... і г. д. (цытавана вышэй).

Наша раўнаньне мае $k = 2$ рэчаісныя корані $x' = -1$, $x'' = 11$, адзін ад аднаго розныя, а дзьве ітэрацыі, якія прапануе аўтар, даюць толькі адзін і той самы корань $x' = 11$.

3) Аўтар рабіў спробы, ня гледзячы на ўсе аргумэнты, абараняць свой „дэдуктыўны мэтод ітэрацыі“, ён зацьвярджаў, што ня гледзячы на ўсё, гэты мэтод ёсьць практычны мэтод вылічэньня, што ён апраўдаў сябе ў практыцы прыбліжэньня, што ён мае практычнае значэньне. Новы выраз практыкі ў матэматыцы! Выраз, якога-б ня мог даць нават найбольш крайні эмпірыст або прагматыст! Практычны мэтод вылічэньня, дзеля якога мы тымчасам ня маем ніякага тэорытычнага абгрунтаваньня, можа часта быць дапушчан, і прыстасоўваецца дзе-ні-дзе ў матэматыцы. „Практычны“ мэтод вылічэньня, які тэорытычна няправільны, ёсьць недарэчнасьць, ёсьць новая выдумка, філёзофічная немагчымасьць, вялікая мэтодолёгічная памылка!

4) Я думаю, што падыход аўтара да проблемы ітэрацыі невыпадковы. Ён мае сваё абгрунтаваньне ў мэтодолёгічных поглядах аўтара, якія ён выказаў у сваёй працы „Эволюцыя альгебраічнай мысьлі і значэньне альгебраічнага сымболізму“ („Полымя“ № 8 за 1925 год). Я ня буду тут болей падрабязна крытыкаваць гэтай працы [1]), я зьвярну толькі ўвагу на тое, што яна абараняе антымарксысцкія погляды [2]), што яна зьмяшчае чужую і варожую нам мэтодолёгію (ідэалізм, махізм [3]). Побач з гэтымі прынцыповымі недахопамі

---

[1]) Я гэта зраблю ў іншым месцы, дзе я буду займацца больш падрабязна крытыкай мэтодолёгічных поглядаў матэматыкаў і фізыкаў.

[2]) „Нашу сучасную эпоху звычайна называюць векам навукі і тэхнікі, бо ніколі не наглядалася такога імкненьня з боку чалавека падпанаваць сабе матэрыяльную дзейнасьць, як зараз. Гэтае імкненьне ідзе па друх кірунках. Адзін кірунак мае на мэце разьвіцьцё матэрыяльнай культуры, г. зн. тэхнічныя вынаходкі, другі—мае на мэце прасякнуць у сьвет зьявішчаў, утварыць агульную сыстэму сьветабудовы. Абодва гэтыя кірункі, бязумоўна, роўнацэнны. Першы—гэта здавальненьне нашых *фізыолёгічных* (падкр. мною, Ц. Б.) патрэб (!—якіх?—Ц. Б.), і дзіўна было-б не прызнаваць навочнай яго паважнасьці. Другі—гэта здавальненьне нашых *інтэлектуальных патрэб* (падкр. мною, Ц. Б.), і мы павінны тутака ясна зразумець справядлівасьць палажэньня, што інтэлектульныя патрэбы вельмі моцныя і зьяўляюцца такім самым фактарам, як голад і смага, *часта яны бываюць нават мацней за фізычныя патрэбы* (падкр. мною, Ц. Б.). Ньютон, напрыклад, калі бываў заняты сваймі адкрыцьцямі, часта забываў есьці“.

[3]) „Сапраўды, прасякнуць увесь сьвет зьявішчаў, утварыць агульную схэму сьветабудовы, натур-філёзоф можа толькі шляхам пабудовы ўну-

гэтая праца зьмяшчае цэлы шэраг поглядаў, няправільных з пункту гледжаньня гісторыі матэматыкі, і перапавялічэньняў. Аўтар выказвае ў адным месцы наступнае:

„Цяпер, спадзяюся, будзе ясным і той прыклад з вывадам Эйнштэйна закона цяжэньня, дзякуючы *ўдалай сымбо-ліцы тэнзорнага аналізу* (падкр. мною, Ц. Б.), і маё цьвярджэньне, што прогрэс матэматыкі, як навукі, зьяўляецца функцыяй разьвіцьця матэматычнага сымболізму“...

Але гэта няправільна: ня сымболіка тэнзорнага лічэньня, але яно само мела ўплыў на разьвіцьцё агульнай тэорыі адноснасьці, на дыфэрэнцыяльную геомэтрыю і г. д. Сымболіка грае часта ў тэнзорным лічэньні, як і ў іншых дысцыплінах, спрашчаючую ролю, але нельга яе зьмешваць з сутнасьцю, зьместам, сэнсам данай дысцыпліны, тым болей разглядаць, як прычыну яе разьвіцьця.

Аўтар падкрэсьлівае знадворны, формальны бок матэматыкі, разьвіцьцё матэматычнай сымболікі, і хоча разумець разьвіцьцё матэматыкі (пры гэтым чыста формальна-хронолёгічнае прадстаўленьне гісторыі матэматыкі) з пункту гледжаньня разьвіцьця матэматычнай сымболікі. Не соцыяльна-экономічнае разьвіцьцё мае нам растлумачваць ход разьвіцьця матэматыкі, і не ўнутраная сутнасьць матэматыкі, яе сувязь з іншымі навукамі, з тэхнікай і г. д., а нейкае чыста формальнае разьвіцьцё сымболікі матэматыкі, чыста знадворныя, формальныя моманты (сымболіка, разьвязваньне раўнаньняў і г. д.) маюць зрабіць зразумелым разьвіцьцё матэматыкі.

Якраз гэта перапавялічэньне знадворна-формальнага боку матэматыкі, якраз гэта перапавялічэньне значэньня сымболікі матэматыкі зьяўляецца аднэй з галоўных памылак у разглядзе разьвіцьця матэматыкі з боку аўтара.

Гэта зьяўляецца таксама прычынай памылак матэматычнай працы аўтара. Якраз у гэтай працы аўтар узяў толькі цалкам знадворны формальны бок ітэрацыі, як аснову для разьвязваньня раўнаньняў, а пакінуў па-за ўвагай сутнасьць, важнасьць, абсяг прыстасавальнасьці гэтага мэтоду, разгля-

---

транага сьвету ідэй і вобразаў, роўналежна, так кажучы, знадворнаму сьвету“.

„З другога боку, *так званыя* (падкр. мною, Ц. Б.) „законы прыроды“ (чужаслоўе аўтара) выражаюць залежнасьць між дзьвюма або больш зьменнымі. Гэтая ідэя залежнасьці зьменных ёсьць асноўная ідэя ўсяго навуковага мысьленьня і дасягае закончанага разгляду толькі ў матэматыцы пад назвай „функцыйнай залежнасьці“.

даў ітэрацыю як сымболь, ня ўходзячы ў яе зьмест, сутнасьць, і таму зрабіў усе тыя памылкі, аб якіх я гаварыў.

5) Застаецца яшчэ сказаць некалькі слоў аб заключэньні працы. Аўтар гаворыць там аб розных дадатных і адмоўных бакох *свайго* „дэдуктыўнага“ мэтоду ітэрацыі, і разважае гэтыя дадатныя і адмоўныя бакі з мэтодолёгічнага, мэтодычнага і практычнага пункту гледжаньня. Мы ўжо раней паказалі няправільнасьць зацьверджаньняў, быццам гэты мэтод цалкам дэдуктыўны ў сэнсе аўтара, і быццам ён не патрабуе ніякіх ведаў аб палажэньні кораню. Але тут ёсьць яшчэ цікавае зацьверджаньне, якое кідае сьвятло на тое, як аўтар няправільна разумее сутнасьць мэтодаў прыбліжэньня (Regula falsi, Newton'a, Lagrange'a); менавіта гаворыцца ў „заключэньні“, што пэўны плюс дэдукцыйнага мэтоду заключаецца „ў неабавязковасьці рацыянальных і цэлых коэфіцыентаў“ (§ 5).

Гэта надта цікава, бо ніводзін з мэтодаў прыбліжэньня ня мае нічога супольнага з рацыянальнасьцю коэфіцыентаў, ні ў адным з мэтодаў прыбліжэньня не прадпалагаецца рацыянальнасьць коэфіцыентаў.

Пры прыстасаваньні Regula falsi, *мэтоду Ньютона, прадпалагаецца толькі рэчаіснасьць коэфіцыентаў,* і тое самае пры мэтодзе Лягранжа (а не, як аўтар зацьвярджае ў пачатку сваёй працы, рацыянальнасьць коэфіцыентаў).

Гэта тым болей дзіўна, што аўтар выкладае вышэйшую альгебру ў Беларускім Дзяржаўным Унівэрсытэце...

Правільна, што „дэдукцыйны“ мэтод ітэрацыі нават не прадпалагае рэчаіснасьці коэфіцыентаў, тады як іншыя мэтоды (Regula falsi, Newton, Lagrange) прадпалагаюць рэчаіснасьць коэфіцыентаў.

Не зьяўляецца ніякім плюсам „дэдукцыйнага“ мэтоду ітэрацыі і тое, што пры яго дапамозе магчыма вылічыць кожны корань з заданай дакладнасьцю, гэта—сутнасьць кожнага мэтоду прыбліжэньня [1])—аб чым, бязумоўна, аўтар павінен ведаць—пытаньне заключаецца тады толькі ў тым, які з мэтодаў найбольш практычны, які раней даводзіць да мэты. Гэта надта важная практычная проблема, а аўтар думае, што яе разьвязаў, выказваючы некалькі зусім агульных выказаньняў, якія, аднак, нічога не гавораць.

---

[1]) Важная практычная проблема вызначэньня ступені набліжэньня пэўнага ліку x_k да кораню x' наогул не дасьледуецца аўтарам і прыстасоўваецца ім у прыкладах бяз усякага абгрунтаваньня.

Да рэчы кажучы, адна з істотнейшых рысаў мэтоду ітэрацыі заключаецца ў тым, што выпадковая памылка ў вылічэньні пэўнага ліку x_k ітэрацыйнае пасьлядоўнасьці, калі толькі яна не занадта вялікая, калі x_k яшчэ ляжыць у інтэрвале $(x'—x_1)$, не парушае вылічэньня, яна можа ў крайнім выпадку замарудзіць прыбліжэньне, але ня можа мець уплыву на зьбежнасьць ітэрацыйнае пасьлядоўнасьці. Гэтай характэрнай адзнакі мэтоду ітэрацыі аўтар наогул не падкрэсьлівае.

Прыведзены аўтарам мэтод „дэдукцыйнай“ ітэрацыі мае толькі мінусы, а ніводнага плюсу, бо ён няправільны, не да ўжытку і ўводзіць у заблуджэньне.

Акрамя гэтага гэты мэтод ітэрацыі ўжо даўно вядомы і пры ўжыцьці мерапрыемстваў асьцярожнасьці (4'), (8) ён карыстасоўваўся надта часта да прыблізнага вылічэньня кораняў трансцэндэнтных раўнаньняў (К. Рунгэ, Numerisches Rechnen, § 51; F. A. Willers, Methoden der praktischen Analysis, § 18).

Да пытаньня выкладаньня матэматыкі ў В. Т. Н. У.

Р. Н. Сагаловіч (Менск).

У гэтым невялікім артыкуле даю некалькі задач, разьвязваньне якіх па сілах студэнту В.Т.Н.У. ў час праходжаньня інтэгральнага лічэньня.

Адны задачы разьвязваюцца элемэнтарна, другія — пры дапамозе інтэгральнага лічэньня. Некаторыя задачы, з прычыны складанасьці вырашыць іх пры дапамозе інтэгральнага лічэньня, разьвязваюцца прыблізна фізычнымі мэтодамі.

§ 1.

Тарфяны вучастак мае форму простакутніка з бакамі a і b. Якую работу патрэбна затраціць на звоз зьнятага торфу да зборных пунктаў, якія знаходзяцца ўздоўж боку b?

Студэнт разьвязвае гэтую задачу элемэнтарна наступным чынам: разьбівае простакутнік простымі, паралельнымі b, на n роўных простакутнікаў, і робіць наступныя вылічэньні:

$$W_1 = \frac{a^2b}{n^2}$$

$$W_2 = \frac{2a^2b}{n^2}$$

$$W_3 = \frac{3a^2b}{n^2}$$

$$\ldots = \ldots$$

$$\ldots = \ldots$$

$$W_n = \frac{na^2b}{n^2}$$

$$W = \lim_{n \to \infty} \frac{a^2b(1+n)n}{2n^2} = ab \cdot \frac{a}{2}$$

Пасьля гэтага студэнт пад кіраўніцтвам выкладчыка разьвязвае гэтую задачу пры дапамозе інтэгральнага лічэньня, каб ўпэўніцца ў тым, што апошняе значна скарачае работу па вылічэньню:

$$W = \int_0^a bxdx = ab \cdot \frac{a}{2} \cdot$$

Вельмі каштоўным для далейшага будзе трэці этап гэтай работы—геомэтрычны, вярней, фізычны мэтод разьвязваньня.

Простакутны паралелепіпэд з асновай роўнай данаму простакутніку і вышынёй, роўнай a, падзелены дыягональнай роўніцай папалам, і дасьць прадстаўленьне аб патрэбнай рабоце.

§ 2.

Вучастак мае форму простакутнага трыкутніка з катэтамі a і b; якую работу патрэбна затраціць на тое, каб зьвезьці торф да зборных пунктаў, якія распаложаны ўздоўж катэта b?

Разьвязваньне гэтай задачы мэтодамі элемэнтарнай матэматыкі складанае, пры дапамозе інтэгральнага лічэньня куды прасьцей:

$$W = \frac{b}{a} \int_0^a (a-x)\, x\, dx = \frac{ab}{2} \cdot \frac{a}{3}$$

Геомэтрычнае растлумачэньне разьвязваньня наступнае:

Простакутная піраміда з асновай, роўнай данаму простакутнаму трыкутніку, і вышынёй, роўнай боку a (вышыня павінна быць праведзена з вяршыні кута B), і дасьць прадстаўленьне аб рабоце.

Зараз ня цяжка вылічыць работу, патрэбную для звозу торфу з вучастка, які мае форму востракутнага трыкутніка, да пунктаў, распаложаных уздоўж аднаго з бакоў, а менавіта:

$$W = \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{3},$$

дзе: b ..... аснова трыкутніка
h ..... вышыня трыкутніка.

Калі поле мае форму простакутнай трапэцыі з асновамі a і b і вышынёй h, і калі патрэбна зьвезьці груз

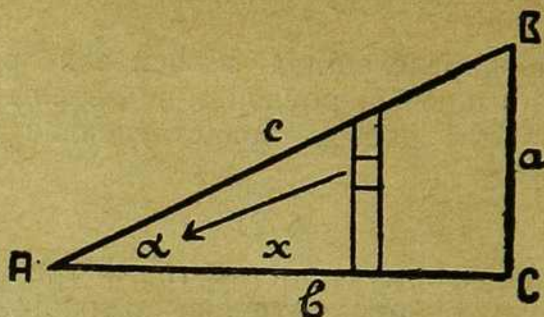
да зборных пунктаў, якія ляжаць уздоўж боку a, дык работа патрэбная будзе:

$$W = h^2 \left[\frac{a}{6} + \frac{b}{3} \right].$$

Увага: $a > b$.

§ 3.

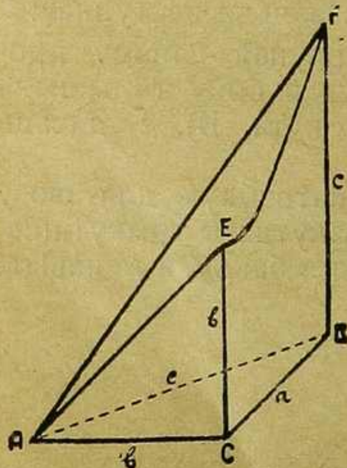
Вучастак мае форму простакутнага трыкутніка; якую работу патрэбна затраціць на звоз да зборнага пункту, які ляжыць у вяршыні трыкутніка.



Элемэнтарна разьвязаць гэтую задачу немагчыма. Інтэгральнае лічэньне дае наступнае:

$$W = \int_0^b \int_0^{x\,tg\alpha} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \frac{b^3}{6} \left[\frac{tg\alpha}{cs\alpha} + \ln(tg\alpha + sc\alpha) \right].$$

Да гэтага рэзультату мы-б прыйшлі, калі-б узялі сабе піраміду, у якой у аснове ляжыць даны простакутны трыкутнік, а бакавой сьценкай піраміды ёсьць фігура, абмежаваная простымі a, b, c і дугой EF, якая зьяўляецца дугой раўнабочнай гіпэрболы.

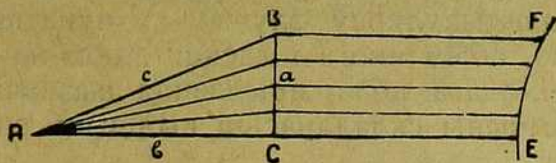


Аб'ём атрыманага цела і дасьць прадстаўленьне аб патрэбнай рабоце.

Для таго, каб давесьці, што дуга EF ёсьць дуга роўнабочнай гіпэрболы, разьвяжам наступную задачу:

Даны простакутны трыкутнік. З пунктаў катэту a праводзяцца

пэрпэндыкуляры, роўныя адлегласьці адпаведнага пункту да вяршыні кута А. Напісаць раўнаньне геомэтрычнага месца канцоў пэрпэндыкуляраў.



Прымем АЕ за вось Х-оў і ВС за вось у—аў, маем:

$$x = \sqrt{y^2 + b^2}$$
$$x^2 - y^2 = b^2.$$

§ 4.

Вучастак мае форму круга. Якую работу патрэбна затраціць на звоз да пункту, які ляжыць у цэнтры круга?

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} x^2 \, d\varphi \, dx = \pi R^2 \cdot \frac{2}{3} R.$$

Геомэтрычны сэнс разьвязваньня гэтай задачы наступны: з пунктаў акружыны правядзем да роўніцы круга пэрпэндыкуляры, даўжынёй у R; злучыўшы канцы пэрпэндыкуляраў з цэнтрам акружыны, атрымаем цела, аб'ём якога і дасьць прадстаўленьне аб патрэбнай рабоце.

§ 5.

Зусім асабліва стаіць пытаньне аб вылічэньні работы па звозу з вучастка, маючага форму круга, да пункту, які ляжыць ня ў цэнтры круга.

Шляхам інтэгральнага лічэньня разьвязаць гэтую задачу даволі складана. Калі адлегласьць ад пункту да цэнтру акружыны азначым праз l, дык атрымаем наступны рэзультат:

$$W = \frac{4}{9} R^3 \left[\left(7 + \frac{l^2}{R^2} \right) \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{l^2}{R^2} \operatorname{sn}^2 \varphi} \, d\varphi - \right.$$
$$\left. - 4 \left(1 - \frac{l^2}{R^2} \right) \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{R^2} \operatorname{sn}^2 \varphi}} \right]$$

Бязумоўна, тут карысна будзе прыблізнае вырашэньне гэтага пытаньня фізычным шляхам: калі з пунктаў акружыны правядзем пэрпэндыкуляры да роўніцы круга, роўныя адлегласьці кожнага пункту акружыны да пункту збору, і канцы пэрпэндыкуляраў злучым з пунктам збору, дык атрымаем цела, аб'ём якога і дасьць адказ на запытаньне.

Аб'ём атрыманага цела прыдзецца вызначыць фізычным мэтодам з прычыны складанасьці вылічыць аналітычна.

§ 6.

У канцы высоўваю наступныя дзьве задачы:

Задача 1.

Дана замкнутая плоская крывая лінія (эліпс, лемпіската); унутры гэтай крывой даны пункт A. З пунктаў крывой пэрпэндыкулярна да роўніцы крывой праведзены пэрпэндыкуляры, роўныя адлегласьці кожнага пункту крывой да пункту A.

Дасьледваць крывую, якая злучае канцы пэрпэндыкуляраў.

Увага: Калі раўнаньне плоскай крывой абазначым праз $y = f(x)$, а пункт праз A (a, b), дык раўнаньне геомэтр. месца пунктаў у парамэтрычнай форме:

$$y = f(x)$$
$$z = \sqrt{(x - a)^2 + [f(x) - b]^2}$$

Задача 2.

Дана замкнутая плоская крывая (эліпс, лемпіската), унутры гэтай крывой даны пункт A. З пунктаў крывой пэрпэндыкулярна да роўніцы крывой праведзены пэрпэндыкуляры, роўныя адлегласьці кожнага пункту да пункту A. Канцы пэрпэндыкуляраў злучаны з пунктам A.

Вылічыць аб'ём атрыманага цела.

15/I-32 г.

СЬПІСАК

дакладаў фізыка-тэхнічнага навуковага таварыства

з 10/IV-30 г. па 20/V-1931 году [1]).

1930 г.

10/IV. Організацыйны сход сяброў Таварыства.

20/IV. Навіны ў распаўсюджаньні кароткіх электрамагнэсаных хваль. (дакл. т. *Некрашэвіч*).

5/V. Агульнае азначэньне комплексных лікаў. Дакладчык проф. *Громмэр*.

" Азначэньне масы. Дакладчык проф. *Громмэр*.

15/V. Новыя спосабы пабудаваньня цыркулярных крывых III-га парадку ў сувязі з клясыфікацыяй вядомых спосабаў. Дакладчык—проф. *Дыдырка*.

---

[1]) За час з 4 сакавіка 1928 да 10 красавіка 1930 г. протоколы т-ва не захаваліся. Па памяці ўдалося ўстанавіць, што за гэты час у т-ве былі між іншымі прачытаны наступныя даклады:

В. Р. Мрочэк.—Аб опэратарах.

Ч. Ч. Дамброўскі.—Аб кніжцы Hilbert'a і Ackermann'a: „Grundzüge der theoretischen Logik“.

Ц. Л. Бурстын.—Проблема шматмернай дыфэрэнцыяльнай геомэтрыі.

" " Аб агрэгатах Пфаффа.

" " Крытыка працы Круталевіча аб дэдукцыйнай ітэрацыі.

Я. Я. Сіроцін.—Аб аднэй загадцы тэорыі лікаў (спроба доваду вялікай тэорэмы Фэрма).

Ц. Л. Бурстын і Я. П. Громмэр.—Крытыка „доваду“ тэорэмы Фэрма, дадзенага Я. Я. Сіроцінym.

Р. Н. Сагаловіч.—Тэорэма Лемуса.

А. К. Усьпенскі.—Хвалевая тэорыя Шрэдынгэра.

" " Аксыёматыка мэханікі.

" " Справаздача аб лекцыях тэорытычнай фізыкі ў Бэрліне.

" " Справаздача аб VI зьезьдзе фізыкаў.

" " Эфэкт Рамана.

" " Эволюцыя атома.

30/V. Паказальнікавая функцыя ў перарыўных процэсах. Дакладчык доц. *Сагаловіч.*

" Адкрыцьцё 9-е вялікае плянэты. Дакладчык доц. *Дамброўскі.*

15/VI. Аб некаторых лінейчатых паверхнях у сувязі з пабудаваньнем модэляй. Дакладчык проф. *Дыдырка.*

" Магчымасьці архімэдызацыі галіны комплексных лікаў. Дакладчык проф. *Бурстын.*

10/IX. Аб вобразах, зьвязаных з паняцьцем простай: лінейчатыя паверхні, конгруэнцыі, комплексы. Дакладчык проф. *Дыдырка.*

" Ператварэньне сячэньняў конусу на яго разгортцы. Дакладчык доц. *Сагаловіч.*

25/IX. Аб першым Усесаюзным Зьезьдзе Матэматыкаў. Дакладчык проф. *Бурстын.*

10/X. Аб эфэкце Сорэ. Дакладчык проф. *Сіроцін.*

" Лінейка для вылічэньня даўжыні дня ў кожнай геаграфічнай шырыні для кожнага дня году. Дакладчык доц. *Дамброўскі.*

" Адна тэорэма з тэорыі матрыц. Дакладчык проф. *Бурстын.*

5/XII. Матэматыка ў політэхнічнай школе. Дакладчык доц. *Сагаловіч.*

12/XII. Абцяканьне дасканалай і нясьціскальнай вадкасьцю адвольнае колькасьці бясконцых паралельных цыліндраў. Дакладчык ас. *Ламбін.*

1931 г.

10/III. Гіпэрболічныя функцыі і кубічныя раўнаньні. Дакладчык доц. *Дамброўскі.*

14/III. Хвалявыя ўласьцівасьці электронаў. Дакладчык проф. *Усьпенскі.*

" Разгляд статуту Таварыства і перавыбары прэзыдыуму.

10/IV. Некаторыя лініі перасячэньня крывых паверхняў II-га парадку. Дакладчык проф. *Дыдырка.*

" Некаторыя думкі наконт вылічэньня працы руху. Дакладчык доц. *Сагаловіч.*

20/IV. Элемэнт з аднароднымі электродамі. Дакладчык доц. *Шалаураў*.

„ Лік Авогадро і яго вылічэньне. Дакладчык асыст. *Маслакавец*.

10/V. Проблема электрона. Дакладчык проф. *Усьпенскі*.

„ Аб атмосфэрнай электрычнасьці. Дакладчык доц. *Сірачынскі*.

20/V. Гіпэркомплексныя лікі, дыфэрэнцыяльныя опэратары і іх прыстасаваньне. Дакладчык проф. *Бурстын*.

ЗАЎВАГА РЭДАКЦЫІ.

Калі ўжо быў надрукаваны артыкул проф. Сіроціна, была выкрыта ў ім адна матэматычная памылка, якая робіць усе вывады няправільнымі. На самай справе з формул (2) і (3) вынікае формула

$$(4') \qquad \frac{\partial c}{\partial t} dx = -\left(\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial x} dx + \frac{\partial k}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial x} dx + \frac{\partial k}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial x} dt + k\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} dx\right),$$

бо:

$$(5') \qquad dc = \frac{\partial c}{\partial x} dx + \frac{\partial c}{\partial t} dt$$

і калі ўвесьці за dc яго значэньне ў формулу (2), тады атрымліваецца формула (4'), а ня формула (4), як падае аўтар.

Калі параўнаць формулу (4) аўтара з формулай (4'), тады відаць, што аўтар прапануе наступнае цьверджаньне:

$$(6') \qquad \frac{\partial k}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial x},$$

якое няправільна, як гэта відаць на наступным прыкладзе:

$$(7') \qquad k = x + c^2, \; c = x + t,$$

тады

$$\frac{\partial k}{\partial c} = 2c, \frac{\partial k}{\partial x} = 1, \frac{\partial c}{\partial x} = 1, \text{ або } \frac{\partial k}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial x} = 2c, \text{ а } \frac{\partial c}{\partial x} = 1,$$

што абвяргае цьверджаньне (6').

Калі тады ўзяць (4') за аснову далейшага разважаньня, тады атрымліваецца не асноўнае раўнаньне аўтара (11), а раўнаньне:

$$(8') \qquad (1+\beta T)\frac{d^2c}{dT^2} = -\beta\frac{dc}{dT},$$

якога агульны інтэграл ёсьць:

$$(9') \qquad c = A\ln(1+\beta T) + B,$$

а не інтэграл (11), як у аўтара.

Відавочна, што інтэграл (9') зьмяняе вынікі працы, даныя аўтарам.

Рэдакцыя.

Berichtigung.

Seite 187, Zeile 11 von oben anstatt „Satr“ ist „Satz“ zu lesen.

ПАПРАЎКА

На станонцы 230 замест: чыстай „і прыкладной“ павінна быць: „чыстай“ і „прыкладной“...

Друкарня БАН. Ґалоўлітбел № 47 Заказ № 3260. Тыраж 500. $18^3/_4$ арк.

B0000002465963